GEOMETRIA 3D

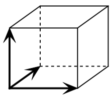
VECTORES EN EL ESPACIO

Características de un vector

Módulo – Dirección – Sentido

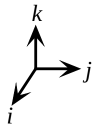
Base

- Vectores coplanarios: Si al tomar representantes con el mismo origen, quedan todos situados en el mismo plano.
- Vectores no coplanarios: Forman una base porque cualquier otro vector se puede expresar como combinación lineal de ellos.



- ***Base ortogonal:*** Es aquella en la que los vectores son perpendiculares dos a dos.
- ***Base ortonormal** (base canónica)**:*** Formada por tres vectores perpendiculares y de módulo unidad.

Se expresa por $B = \{i, j, k\}$. Módulo: $|i| = |j| = |k| = 1$ ángulos: $i \perp j$; $j \perp k$; $i \perp k$

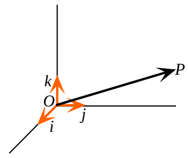


Sistema de referencia en el espacio

Es el conjunto formado por: I. Un punto fijo **O** del espacio, llamado origen. II. Una base cualquiera.

El vector $\overrightarrow{OP}$ es combinación lineal de los vectores que forman la base: $\overrightarrow{OP} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$.

Los números x, y, z reciben el nombre de coordenadas del vector y se puede expresar: $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$



Suma analítica de vectores

Sumamos cada coordenada del primer vector, por la correspondiente coordenada del segundo vector.

Ejemplo: $u = 2i + 3j - 5k = (2,3,-5)$ $v = -i + 4j - 6k = (-1,4,-6) \rightarrow u + v = i + 7j - 11k = (1,7,-11)$

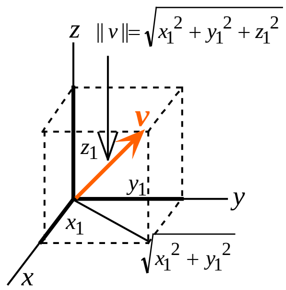
Producto de un vector por un número real

Se multiplica cada una de las coordenadas del vector por dicho número.

Ejemplo: Siendo $u = -3i + 2j - k = (-3,2,-1)$ $\rightarrow$ $3u = 3.(-3i + 2j - k) = -9i + 6j - 3k = (-9,6,-3)$

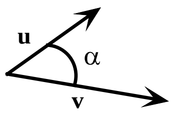
Módulo de un vector

El módulo del vector v, se obtiene aplicando dos veces el teorema de Pitágoras.



$$\boxed{|\vec{v}| = +\sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2}}}$$

Producto escalar de dos vectores



Es un número y se obtiene al multiplicar el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman.

$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| . |\vec{v}| . \cos\alpha}$ El producto escalar es conmutativo

Si: $u = x_1 i + y_1 j + z_1 k$; y $v = x_2 i + y_2 j + z_2 k$ $\rightarrow$ $u.v = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

Ejemplo: Si $u = 2i + 3j - 5k = (2,3,-5)$ y $v = -i + 4j - 6k = (-1,4,-6)$ $\rightarrow$ $u.v = -2 + 12 + 30 = 40$

Ángulo de dos vectores

Despejando el ángulo del producto escalar: $\boxed{\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|u| . |v|}}$

Ejemplo:

Halla el ángulo que forman los vectores $u = (3,2,6)$ y $v = (-4,5,1)$: $\vec{u}.\vec{v} = -12 + 10 + 6 = 4$

$$|u| = \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7 \; ; \; |v| = \sqrt{16 + 25 + 1} = \sqrt{42} \rightarrow \cos\alpha = \frac{u.v}{\|u\| . \|v\|} = \frac{4}{7\sqrt{42}} .$$

$$\alpha = \text{Arc Cos}\left(\frac{4}{7\sqrt{42}}\right) \rightarrow \alpha = 84{,}94^{\circ}$$

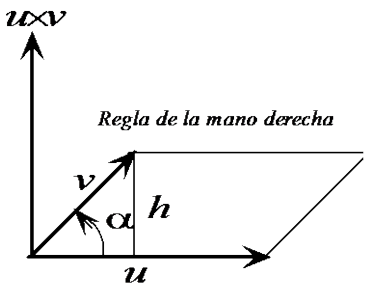
Producto vectorial

Su producto es otro vector perpendicular a los anteriores

$$\begin{aligned} Si \quad & u = x_1 i + y_1 j + z_1 k = (x_{1i}, y_1.z_1) \\ y \quad & v = x_2 i + y_2 j + z_2 k = (x_2, y_2, z_2) \end{aligned} \qquad u \times v = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ i & j & k \end{bmatrix} \quad \text{O: } u \times v = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

El vector $u \times v$ tiene las siguientes características: o

- ***Módulo:*** El producto de los módulos por el seno del ángulo que forman. $|\vec{u} \times \vec{v}| = |u| . |v| .sen\alpha$
- ***Dirección:*** Perpendicular al plano determinado por los vectores *u* y *v*.
- ***Sentido:*** Viene dada por la regla de la mano derecha:



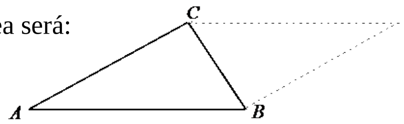
El producto vectorial es anticonmutativo: $u \times v = -v \times u$
El producto vectorial de dos vectores paralelos es nulo,

El módulo del producto vectorial coincide con el área del paralelogramo formado
$\| u \times v \| = \| u \| . \| v \| .sen\alpha = \| u \| .h$ = área del paralelogramo.

Área del triángulo:

Dado el triángulo de vértices A, B y C,
como el triángulo es la mitad del paralelogramo, su área será:

$$\boxed{Área = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}$$



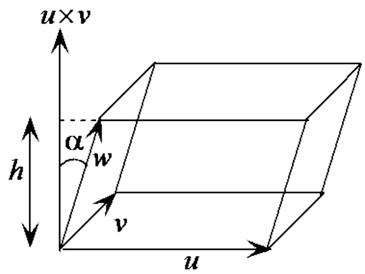
Producto mixto

Producto mixto de tres vectores *u*, *v* y *w* es un número que se obtiene al realizar el producto escalar del primero por el producto vectorial de los otros dos. $[u, v, w] = \mathbf{u}.(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

Coincide con el valor del siguiente determinante: $[u, v, w] = \mathrm{u}.(\mathrm{v} \times \mathrm{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

Interpretación geométrica:

Coincide con el volumen del paralelepípedo formado por sus vectores
$w.(\vec{u} \times \vec{v}) = |w| . |(u \times v)| . \cos\alpha = |(u \times v)| . |w| . \cos\alpha$,
$|w.(u \times v)| =$ área de la base $\times$ altura $=$ Volumen del paralelepípedo.



Ejemplos:

1. Calcula el producto vectorial de los vectores $u = (1,7,-3)$ y $v = (-5,0,4)$

Conviene colocar el primer vector y debajo de este el segundo:

u = (1, 7, -3)
v = (-5, 0, 4)

$$u \times v = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -3 \\ -5 & 0 & 4 \\ i & j & k \end{bmatrix} \qquad u \times v = \left(\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} \right) = (28, 11, 35)$$

2. Dados los vectores *u = (3, 2, 5)* y *v = (4, 1, 6),* halla un vector perpendicular a ambos y el área del paralelogramo que determinan.

Un vector perpendicular a ambos es el producto vectorial: *u = (3, 2, 5)* *v = (4, 1, 6)*

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 12i + 20j + 3k - 8k - 5i - 18j = 7i + 2j - 5k = (7,2,-5)$$

El área del paralelogramo que determinan es el módulo del producto vectorial:
Área = $\| u \times v \| = \sqrt{7^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{78}$ → Área = $\sqrt{78}\ \mathrm{u}^2$

Ejercicios resueltos de vectores

1.- Determina el valor de **t** para que los vectores de coordenadas (1, 1, t), (0, t, 1-t) y (1, -2, t) sean linealmente dependientes).

Solución:

Si son linealmente dependientes, uno de ellos, se podrá expresar como combinación lineal de los otros restantes, por tanto: (1, 1, t) = α(0, t, 1-t) + β(1, -2, t)

Y de aquí se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l}\beta = 1\\ \alpha t - 2\beta = 1\\ \alpha(1-t) + \beta t = t\end{array}\right\} \text{ y de aquí resulta } \left.\begin{array}{l}\alpha t = 3\\ \alpha(1-t) = 0\end{array}\right\}$$

Si $\alpha(1-t) = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ ó } 1-t = 0 \Rightarrow t = 1$

Y si t = 1, α = 3

La relación de dependencia es $(1,1,1) = 3.(0.1.0) + 1.(1,-2,1)$, es decir:

$$(1,1,1) - 3.(0,1,0) - 1.(1,-2,1) = (0,0,0)$$

2.- ¿Puede haber dos vectores u y v tales que $u.v = -3,\ \|u\| = 1$ y $\|v\| = 2$?

Solución:

Si α es el ángulo que forman, de la definición de producto escalar, se obtiene:

$$u.v = \|u\|.\|v\|.\cos\alpha$$

Y entonces, $-3 = 1.2.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -1{,}5$

Dicha relación es imposible porque $-1 \le \cos\alpha \le 1$

3.- Halla el valor de **a** para que los vectores $u = (-2,1,5)$ y $v = (a,2,6)$, sean perpendiculares.

Solución:

Para que sean perpendiculares, el producto escalar ha de ser nulo, por tanto,

$(-2,1,5).(a,2,6) = 0 \Rightarrow -2a + 2 + 30 = 0$ y de aquí se obtiene a = 16

4.- Halla un vector w cuyo módulo sea 4 y además perpendicular a $u = (2,0,1)$ y $v = (3,-1,2)$

Sabemos que el producto vectorial de dos vectores es un vector perpendicular a cada uno de ellos,

Por tanto, $u \times v = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \right) = (1,-1,-2)$

Lo dividimos por su módulo para obtener un vector de módulo unidad:

$u \times v = (1,-1,-2)$ es perpendicular a **u** y a **v**.

$$\|u \times v\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}\ ; \quad \frac{u \times v}{\|u \times v\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,-2) = \left(1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6} \right)$$

El vector unitario obtenido lo multiplicamos por 4 y obtenemos el vector buscado:

$$w = 4\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right) = \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{-2\sqrt{6}}{3}, \frac{-4\sqrt{6}}{3} \right)$$

5.- Comprueba si los vectores (1, 2, 3), (4, 5, 6) y (7, 8, 9) de R^3 son linealmente independientes.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ninguna fila es nula y por debajo de la diagonal principal todo son ceros. Los vectores dados son linealmente independientes. Otra forma es saber si el determinante de la matriz es distinto de cero.

6.- Consideremos el conjunto de los polinomios de grado dos con una indeterminada. Dichos polinomios pueden ser considerados como vectores. Estudia si los polinomios $A(x) = 1 - x + 4x^2$; $B(x) = 3 + 6x + 2x^2$ y $C(x) = 2 + 10x - 4x^2$ son linealmente dependientes o independientes.

Solución:
Los polinomios dados podemos expresarlos en la forma siguiente: A = (1, -1, 4), B = (3, 6, 2) y C = (2, 10, -4)
Si aplicamos el método de Gauss, resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & 2 \\ 2 & 10 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 9 & -10 \\ 0 & 12 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 36 & -40 \\ 0 & 36 & -36 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 10 \\ 0 & 36 & -40 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Hemos llegado a tres filas, ninguna de ellas nulas, y todo ceros por debajo de la diagonal principal.
Los polinomios dados son linealmente independientes.

7.- El vector $v = (1,3,-2)$ está dado en la base canónica.
Halla sus componentes respecto de la base $B = \{(1,1,1), (1,0,1), (0,2,3)\}$

Solución:
$(1,3,-2) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,0,1) + \lambda(0,2,3)$
Esto nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + 2\lambda = 3 \\ \alpha + \beta + 3\lambda = -2 \end{array}\right\}$$

Sumando la 1ª ecuación, cambiada de signo a las otras dos,

$$\left.\begin{array}{l} -\beta + 2\lambda = 2 \\ 3\lambda = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = -1 \text{ y entonces } \beta = -4$$

Si el valor de β lo llevamos a la 1ª ecuación del sistema inicial, $\alpha - 4 = 1 \Rightarrow \alpha = 5$
El vector v queda expresado en función de los elementos que forman la base en la forma siguiente: $(1,3,-2) = 5(1,1,1) - 4(1,0,1) - 1(0,2,3)$

8.- Estudia si los vectores (1, 1, 0), (0,1, 1) y (2, 1, –1) forman una base de R^3

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hemos llegado a una matriz con la tercera fila nula, los vectores dados son linealmente dependientes y, por tanto, no forman una base de R^3

9.- Nos dan los vectores $a = (1,0,-1)$, $b = (0,2,-1)$ y $c = (2,0,0)$. Halla:

a) Valor absoluto del producto mixto de a, b y c y da su significado geométrico.
b) Ángulo que forman b y c.
c) Razona si $\{a, b, c\}$ forman una base y, en caso afirmativo, halla las coordenadas del vector $u = (1,-2,0)$ en dicha base.

Solución

a) $[a, b, c] = a.(b \times c) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2(0-(-2)) = 4$

Valor absoluto del producto mixto es $|4| = 4$

El valor absoluto del producto mixto es el volumen del paralelepípedo definido por los s tres vectores.

b) Para calcular el ángulo que forman b y c aplicamos la definición de producto escalar:

$b.c = \|b\|.\|c\|.\cos\alpha$ y de aquí

$$\cos\alpha = \frac{b.c}{\|b\|.\|c\|} = \frac{0.2+2.0+(-1).0}{\sqrt{0^2+2^2+(-1)^2}.\sqrt{2^2+0^2+0^2}} = \frac{0}{\sqrt{5}.2} = 0$$

Si $\cos\alpha = 0$, entonces $\alpha = 90º$

c) Podemos hacerlo por el método de Gauss o bien por determinantes. Si el determinante es distinto de cero, los vectores son linealmente independientes.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2(0-(-2)) = 4 \neq 0$$

Y como estamos en R^3 los vectores forman una base. Esto significa que cualquier otro vector se puede expresar como combinación lineal de ellos. Si queremos hallar las coordenadas de $u = (1,-2,0)$ respecto de la base, escribimos:

$(1,-2,0) = \alpha(1,0,-1) + \beta(0,2,-1) + \lambda(2,0,0)$ y ello nos lleva al sistema siguiente

$\left.\begin{array}{l} \alpha + 2\lambda = 1 \\ 2\beta = -2 \\ -\alpha - \beta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \beta = -1;\ \alpha = 1;\ \lambda = 0$ que son las coordenadas buscadas.

10.- dados los vectores $u = (3,2,5)$ y $v = (4,1,6)$ halla el área del triángulo que determinan.

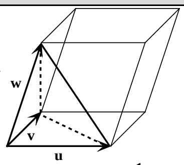
El área del triángulo determinado por dos vectores viene dada por la fórmula siguiente:

Hemos de hallar, por tanto, el producto vectorial de los dos vectores dados: $\text{Área} = \frac{1}{2}\|\vec{u} \times \vec{v}\|$

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 7i + 2j - 5k = (7,2,-5) \rightarrow \|u \times v\| = \sqrt{7^2 - 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{78} \quad \textit{Área} = \frac{1}{2}\sqrt{78}$$

11.- Dados los vectores $u = (3,-2,5)$, $v = (-4,1,6)$ y $w = (2,0,-1)$, halla el volumen del tetraedro que forman

El volumen del tetraedro es $\frac{1}{6}$ del producto mixto tomado en valor absoluto.



$$u.(v \times w) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -4 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 24 - 10 + 8 = -29 \rightarrow \textit{Volumen}_{(tetraedro)}) = \frac{1}{6}|-29| = \frac{29}{6}u^2$$

12.- Halla un vector unitario que tenga la misma dirección que $u = (1,1,-2)$

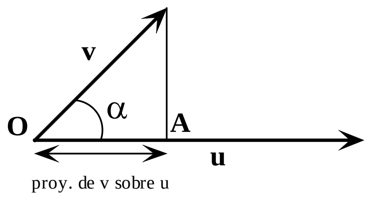
Dado un vector u, entonces el vector $\dfrac{u}{\| u \|}$ es unitario.

Módulo de u: $|u| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$

Por tanto, $\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{-2}{\sqrt{6}}\right)$ será unitario (modulo1) y de la misma dirección que u.

13.- Prueba que el producto escalar de dos vectores **u** y **v**, es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre el.

Solución:

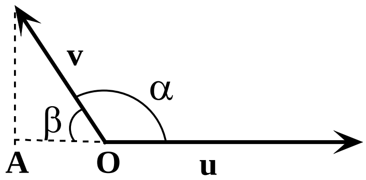


$u.v = \| u \| . \| v \| . \cos\alpha$

$OA = \| v \| . \cos\alpha = \text{proy. de v sobre u}$

luego $u.v = \| u \| .OA$

En el caso de que el ángulo sea obtuso se obtiene :



Los ángulos α y β son suplementarios

por tanto, $\cos\alpha = -\cos\beta$

$u.v = \| u \| . \| v \| . \cos\alpha$

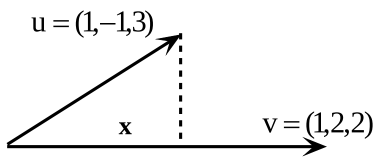
$\| v \| . \cos\alpha = -\| v \| \cos\beta = -OA$

donde OA es la proyección de **v** sobre **u** es decir, $u.v = -\| u \| .OA$

Observación:

- Cuando el producto escalar es positivo, el ángulo es agudo
- Cuando el producto es negativo, el ángulo es obtuso.

14.- Halla la proyección ortogonal del vector $u = (1,-1,3)$ sobre $v = (1,2,2)$



Solución:

$u.v = 1.1 + (-1).2 + 3.2 = 5$

El ángulo que forman los vectores es agudo

$\| v \| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$

$u.v = \| v \| .x \Rightarrow 5 = 3.x \Rightarrow x = \dfrac{5}{3}$ (que es la medida del segmento x)

Dividimos el vector v por su módulo a fin de obtener un vector de la misma dirección y sentido pero de módulo unidad:

$\| v \| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$; $\dfrac{v}{\| v \|} = \dfrac{1}{3}(1,2,2) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$

Finalmente, el vector unitario obtenido lo multiplicamos por $5/3$:

$$\text{proy. de u sobre v} = \vec{x} = \frac{5}{3}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{5}{9}, \frac{10}{9}, \frac{10}{9}\right)$$

Ejercicios con solución

1.- Determinar los valores del parámetro **a**, para los cuales forman base de R^3 los vectores $(a,1,-2), (1,a,2)$ y $(2a,1,0)$

Sol. Para todo valor de a distinto de $1/2$ y de -1

2.- En el conjunto R^3 se consideran los vectores siguientes: $u = (1,2,-1),\ v = (3,-2,0)$ y $w = (-7,10,-2)$

Prueba que son linealmente dependientes y encuentra la relación de dependencia.

Sol. Basta comprobar que el determinante es nulo $2(1,2,-1) - 3(3,-2,0) - (-7,10,-2) = (0,0,0)$

3.- Sean los siguientes vectores de R^3 : $u = (1,2,-1), v = (1,-1,1)$ y $w = (2,5a,-3a)$

Determina el valor numérico del parámetro a para que sean linealmente dependientes y encuentra una relación de dependencia.

Sol. a = 2 $4(1,2,-1) - 2(1,-1,1) - 2(2,10,-6) = (0,0,0)$

4.- Dados los vectores $A = (a,8,4), B = (-1,2,0)$ y $C = (0,1,2).$ Halla los valores de **a** para que **A** se pueda expresar como combinación lineal de **B** y de **C** Sol. a = -3

5.- Determina la expresión general de los vectores de R^3 que son combinación lineal de los vectores $(1,2,-1)$ y $((4,1,1)$ *Sol.* $(\alpha + 4\beta, 2\alpha + \beta, -\alpha + \beta)$

6.- Los vectores $a = -i + 2k,\ b = 2i + j - k$ y $c = i + 2j + 2k$ están expresados en una base ortonormal. Calcula: $a \times b;$ $a \times (c \times a)$ y $a.(a \times b)$

Sol. $a \times b = -2i + 5j - k$; $a \times (c \times a) = 8i + 10j + 4k$ *;* $a.(a \times b) = 0$

7.- Sean u y v tales que $\| u \| = 2,\ \| v \| = 1$ y que forman un ángulo de 45º. Calcula λ de modo que $u + \lambda v$ sea perpendicular a u Sol. $\lambda = -2\sqrt{2}$

8.- dados los vectores $v = (2,5,-1)$ y $u = (1,0,3),$ halla la proyección ortogonal de v sobre u. Sol. $x = \left(\frac{-1}{10}, 0, \frac{-3}{10} \right)$

9.- Dados los vectores $a = (1,2,1),\ b = (3,1,-2)$ y $c = (4,-1,0),$ determina: Su producto mixto

Volumen del paralelepípedo determinado por ellos. Sol. $[a,b,c] = -25$ $V = 25\,u^3$

Ecuaciones de la recta y del plano en 3D

Ecuaciones de la recta:

Vectorial $\boxed{(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(v_1, v_2, v_3)}$

Paramétricas $\boxed{\begin{array}{l} x = x_0 + \lambda v_1 \\ y = y_0 + \lambda v_2 \\ z = z_0 + \lambda v_3 \end{array}}$ **Continua** $\boxed{\dfrac{x - x_0}{v_1} = \dfrac{y - y_0}{v_2} = \dfrac{z - z_0}{v_3}}$

Ecuaciones del Plano

Ec. Vectorial $\boxed{(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)}$

Ec. Paramétricas $\boxed{\begin{array}{l} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{array}}$ **General**: $\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$

Plano que pasa por tres puntos (ejemplo)

Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos A(2, 1, 3), B(3, 3, 2) y C(3, 2, 5).

$u = \overrightarrow{AB} = (1,2,-1)$; $v = \overrightarrow{AC} = (1,1,2)$

Si elegimos, por ejemplo, el punto A(2, 1, 3), resulta:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Y desarrollando el determinante,

$$4(x-2) - 1(y-1) + 1(z-3) - 2(z-3) + 1(x-2) - 2(y-1) = 0 \quad \rightarrow \quad 5x - 3y - z - 4 = 0$$

Posiciones relativas

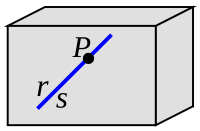
Posición relativa de las rectas

1º.- Si sus vectores directores son proporcionales:

Las rectas son paralelas o coincidentes.

Coger un punto P de la recta r y sustituir en la otra recta.

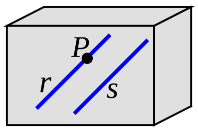
Rectas coincidentes



$$\frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2} = \frac{v_3}{w_3}$$

y el punto P verifica las ecuaciones de la recta s

Rectas paralelas



$$\frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2} = \frac{v_3}{w_3}$$

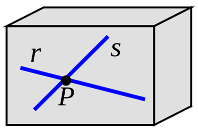
pero el punto P no verifica las ecuaciones de la recta s

2º. Si sus vectores de dirección no son proporcionales:

Las rectas se cortan o se cruzan.

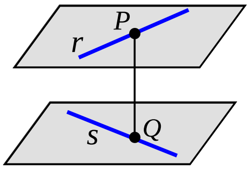
Con los puntos $P(x_0, y_0, z_0)$ y $Q(x_1, y_1, z_1)$ obtenemos el vector $\overrightarrow{PQ}$

$$\text{Si} \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$



Rectas que se cortan

$$\text{Si} \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix} \neq 0$$



Rectas que se cruzan

Ejemplo:

$$r:\begin{cases} x = 2-3\lambda \\ y = 3+5\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 5 \end{cases}$$

Como los vectores (-3, 5, 1) y (-1, 2, 0) no son proporcionales, las rectas se cortan o se cruzan.

Un punto de *r* es P(2, 3, 0) y un punto de *s* es Q(1, 0, 5), por tanto, $\overrightarrow{PQ} = (-1,-3,5)$

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -30+3+2+25 = 0$$. Las rectas se cortan.

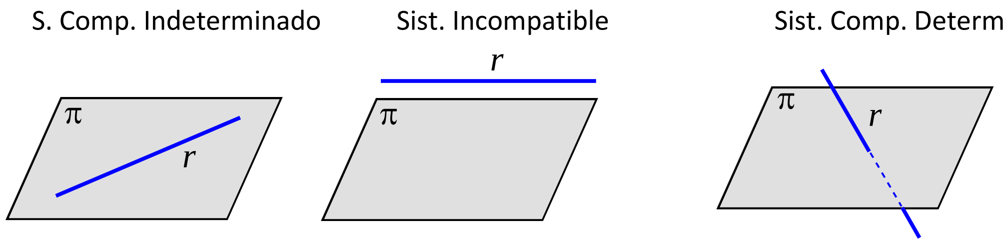
Cambiamos el parámetro de la segunda recta: $s:\begin{cases} x = 1-\mu \\ y = 2\mu \\ z = 5 \end{cases}$

Igualamos las coordenadas de las dos ecuaciones: $\begin{cases} 2-3\lambda = 1-\mu \\ 3+5\lambda = 2\mu \\ \lambda = 5 \end{cases}$

y se obtiene $\lambda = 5$; $\mu = 14$.
El punto de corte se obtiene haciendo $\lambda = 5$ en la primera ecuación o $\mu = 14$ en la segunda.
Se cortan en el punto P(-3, 28, 5).

Posición relativa de una recta y un plano

Método1: Estudiar sus ecuaciones



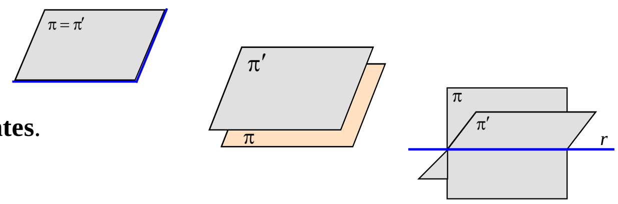
Método 2: Con la recta en ec. Paramétricas, sustituimos su ecuación en el plano

I. Si 0 = 0, desapareciendo λ, todos los puntos de la recta son soluciones válidas → contenida.
II. Si llegamos al absurdo 0 = k, no hay solución → la recta es exterior
III. Si λ = k, la recta corta al plano en un punto. Dicho punto se obtiene sustituyendo el valor de λ en la recta.

Posición relativa de dos planos

Dados los planos $\begin{cases} \pi \equiv Ax+By+Cz+D=0 \\ \pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$ Estudiamos el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$

- Si Rang(M) = Rang (M') = 1 → **coincidentes**.
- Si Rang(M) < Rang (M') Sist.Incompatible → **paralelos**.
- Si Rang(M) = Rang (M') = 1 , Sist. Comp. Indet. → **secantes**.



Ejemplo:

Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1 : x+y+z+1=0$; $\pi_2 : x+2z=0$

En la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ vemos a simple vista, que los coeficientes no son proporcionales, por tanto, los planos se cortan en una recta. Para hallar la ecuación de la recta, hacemos z = λ y entonces resulta $x = -2\lambda$. Sustituyendo en la primera ecuación se obtiene $y = -1+\lambda$ La reta intersección, en paramétricas, es $\begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

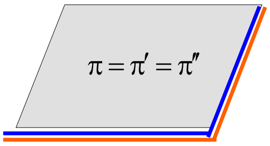
Posición relativa de tres planos

Dados los planos:

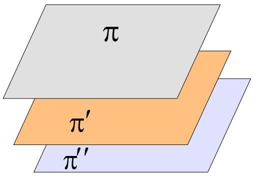
$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0;\ \pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0;\ \pi'' \equiv A''x + B''y + C''z + D'' = 0,$$

Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada:

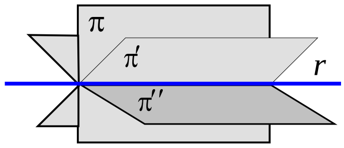
$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix};\ M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$



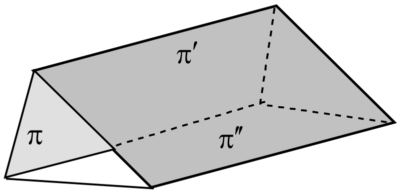
rang(M)=rang(M*)=1



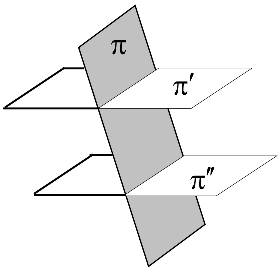
rang(M)=1; rang(M*)=2



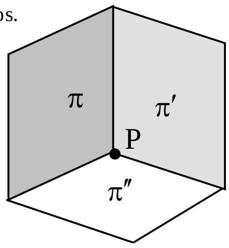
rang(M)=rang(M*)=2



rang(M)=2; rang(M*)=3
Los planos se cortan dos a dos.



rang(M)=2
rang(M*)=3
Hay dos planos paralelos, es decir, con coeficientes proporcionales.



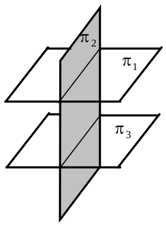
rang(M)=rang(M*)=3=número de incógnitas
Sistema compatible determinado, solución única
Los planos se cortan en el punto P.

Ejemplos:

1. Estudia la posición relativa de los planos

$$\pi_1 : 2x + y - z + 6 = 0$$
$$\pi_2 : 3x - y + z + 5 = 0$$
$$\pi_3 : 4x + 2y - 2z + 1 = 0$$

Observando la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, vemos que la tercera fila es el doble de la primera, coeficientes proporcionales, luego los planos π_1 y π_3 son paralelos.



Por otra parte, el plano π_2 es secante con π_1 y también con π_3

También puede verse a través del rango. El rango de la matriz de coeficientes es dos, mientras que el rango de la matriz ampliada es tres. Además, como hay dos planos paralelos, la posición es la que hemos dibujado.

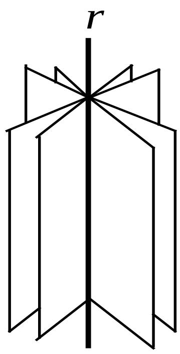
2. Halla el valor de k para que los planos $x + y + z = 2$; $2x + 3y + z = 3$ y $kx + 10y + 4z = 11$, *se corten en una recta.*

Se ha de verificar que $\text{rang}(M) = \text{rang}(M^*) = 2$ Aplicando el método de Gauss,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ k & 10 & 4 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 10-k & 4-k & 11-2k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 14-2k & 21-3k \end{pmatrix}$$

Para k = 7, los rangos valen 2.

Haz de planos



Dada una recta $r:\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$

se llama haz de planos secantes de arista *r*, al conjunto de todos los planos que pasan por *r*. El haz de planos viene definido por la siguiente ecuación:
$\alpha(Ax+By+Cz+D)+\beta(A'x+B'y+C'z+D')=0$ es decir, es la combinación lineal de los dos planos que determinan la recta *r*.

Ejemplo:

Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $r:\begin{cases} 2x-y+3=0 \\ 3x+y+z-2=0 \end{cases}$

y es paralelo a la recta $s:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$

Haz de planos que pasa por r: $2x-y+3+\lambda(3x+y+z-2)=0$ o bien,

$$(2+3\lambda)x+(-1+\lambda)y+\lambda z+(3-2\lambda)=0$$

Si es paralelo a s , los vectores $(-1,2,-1)$ y $(2+3\lambda,-1+\lambda,\lambda)$ son perpendiculares, por tanto, el producto escalar es nulo: $-1(2+3\lambda)+2(-1+\lambda)-1(3-2\lambda)=0$

Resolviendo la ecuación obtenemos λ = –2.   Sustituyendo en la ecuación del haz, obtenemos $4x+3y+2z-7=0$

Ejercicios resueltos

1.- Estudia si los cuatro puntos A(1, 2, -1), B(1, 3, 0), C(0, 0, 1) y D(0, 2, 4) son coplanarios.

Solución:
Una forma de hacerlo es hallar la ecuación del plano determinado por los tres primeros puntos:

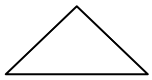
$$A(1,2,-1),\ \overrightarrow{AB}=(0,1,1),\ \overrightarrow{AC}=(-1,-2,2)$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 4x-y+z-1=0$$

A continuación sustituimos el punto D(0, 2, 4) en la ecuación del plano. Si se verifica la ecuación, los puntos son coplanarios. En caso contrario, forman un tetraedro:
$4.0-2+4-1\neq 0,$ por tanto, los puntos no están en el mismo plano, no son coplanarios.

2.- Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A(0, 1, 0), B(0,1, 1) y C(1, 2, 1)

Solución:



Hallamos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}=(0,0,1)$ $\overrightarrow{AC}=(1,1,1)$

Aplicamos la formula siguiente: $\text{Área}=\dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&0\\1&1\end{vmatrix}\right)=(-1,1,0);\ \|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$$

$$\text{Área}=\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\,u^2$$

3.- Sea el plano π: $3x-5y+z-2=0.$ Halla la ecuación del plano π', paralelo al anterior, que contiene al punto A(-3, 2, 4)

Solución:
La ecuación del plano π' será de la forma siguiente: $\pi':3x-5y+z+D=0$
Como $A\in\pi',$ podemos sustituir las coordenadas de A en la ecuación del plano π' por tanto,
$3(-3)-5.2+4+D=0\Rightarrow$ D = 15 y entonces $\pi':3x-5y+z+15=0$ es el plano buscado.

4.- Dada la recta r definida por la intersección de dos planos, escribe su ecuación en forma paramétrica.

$$r:\begin{cases}2x-y-2z-2=0\\ x+y-z-1=0\end{cases}$$

Solución:

Hacemos $z=\lambda$ se obtiene el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{l}2x-y=2+2\lambda\\ x+y=1+\lambda\end{array}\right\}$$ y sumando ambas ecuaciones resulta $x=1+\lambda$

Sustituyendo en la 2ª ecuación resulta $y=0$, por tanto, $r:\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=0\\ z=\lambda\end{cases}$

5.- Estudia la posición relativa de la recta $x-1=\frac{y-2}{2}=\frac{z-2}{4}$ y el plano de ecuación $2x+4y-z+4=0$

Solución:

$$x-1=\frac{y-2}{2}=\frac{z-2}{4}=\lambda\Rightarrow \begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=2+2\lambda\\ z=2+4\lambda\end{array}$$

Sustituyendo en la ecuación del plano obtenemos:

$2(1+\lambda)+4(2+2\lambda-(2+4\lambda)+4=0 \Rightarrow \lambda=-2$

La recta y el plano se cortan en un punto P de coordenadas $(1-2,2+2(-2),2+4(-2))$,

es decir $P(-1,-2,-6)$

6.- Calcula k para que se corten las siguientes rectas y averigua en qué punto lo hacen:

$$r:\begin{cases}x+2y+z=3\\ x-5y-z=-1\end{cases}\qquad s:\begin{cases}2x+y=2\\ x+y+kz=5\end{cases}$$

Solución:

Ecuaciones paramétricas de la recta r: $\left.\begin{array}{l}x+2y+z=3\\ x-5y-z=-1\end{array}\right\}\Rightarrow 2x-3y=2.$ Si hacemos y = 2λ, x = 1 + 3λ

Sustituyendo en la 1ª ecuación, z = 2– 7λ, por tanto, $r:\begin{cases}x=1+3\lambda\\ y=2\lambda\\ z=2-7\lambda\end{cases}$

Ecuaciones paramétricas de la recta s: $\left.\begin{array}{l}2x+y=2\\ x+y+kz=5\end{array}\right\}\Rightarrow -x+kz=3.$ Si hacemos z = μ, $x=-3+k\mu$

Sustituyendo en la 1ª ecuación, $y=8-2k\mu$, por tanto, $s:\begin{cases}x=-3+k\mu\\ y=8-2k\mu\\ z=\mu\end{cases}$

Un punto y un vector de la recta r: $P(1,0,2)$; $u=(3,2,-7)$

Un punto y un vector de la recta s: $Q(-3,8,0)$; $v=(k,-2k,1)$

Hallamos el vector que une los dos puntos: $\overrightarrow{PQ}=(-4,8,-2)$

Finalmente, igualamos a cero el determinante formado por los tres vectores:

$\begin{vmatrix}-4 & 8 & 2\\ 3 & 2 & -7\\ k & -2k & 1\end{vmatrix}=0$. Resolviendo la ecuación se obtiene k = 2.

El punto de intersección lo podemos obtener igualando las dos ecuaciones y resolviendo el sistema formado:

$$r:\begin{cases}x=1+3\lambda\\ y=2\lambda\\ z=2-7\lambda\end{cases}\qquad s:\begin{cases}x=-3+2\mu\\ y=8-4\mu\\ z=\mu\end{cases}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}1+3\lambda=-3+2\mu\\ 2\lambda=8-4\mu\\ 2-7\lambda=\mu\end{array}\right\}$$ y de aquí,

$$\left.\begin{array}{l}3\lambda-2\mu=-4\\ 2\lambda+4\mu=8\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}6\lambda-4\mu=-8\\ 2\lambda+4\mu=8\end{array}\right\}\Rightarrow\lambda=0$$

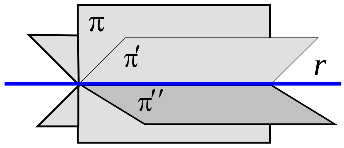
El punto de corte se obtiene llevando el valor de λ obtenido a la ecuación de la recta r: Punto de corte: **(1, 0, 2)**

7.- Halla la posición relativa de los tres planos siguientes.

$$\pi_1: 2x-y+3z=11$$
$$\pi_2: x+y-z=6$$
$$\pi_3: x-5y+9z=4$$

Solución:
Podemos hacerlo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&6\\2&-1&3&11\\1&-5&9&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&6\\0&-3&5&-1\\0&-6&10&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&6\\0&-3&5&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$



rang(M)=rang(M*)=2

rang(M) = rang(M*) = 2 → Planos secantes. Los tres planos se cortan en una recta.

8.- Dadas las rectas r: $\frac{x}{3}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{1}$ y s: $(x,y,z)=(2,1,1)+\lambda(3,-1,3)$, encuentra el plano que pasa por r y es paralelo a s.

Solución:
Utilizamos el punto de la recta r y los vectores de cada una de las dos rectas:

$$\begin{vmatrix}x&y-1&z\\3&0&1\\3&-1&3\end{vmatrix}=0\Rightarrow 3(y-1)-3z+3x-9(y-1)=0$$ y simplificando obtenemos la ecuación implícita del plano buscado: $x-6y-3z+6=0$

9.- Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A(2, -1, 0) y se apoya en las rectas

$$r:\begin{cases}x-y+3z=4\\ x-y+z=2\end{cases}\qquad s:\frac{x}{3}=y+2=1-z$$

Solución:
Plano que pasa por A y contiene a la recta r: $x-y+3z-4+\alpha(x-y+z-2)=0$ (Haz de planos)
Y como pasa por A(2,-1, 0), $2+1-4+\alpha(2+1-2)=0\Rightarrow\alpha=1$, por tanto,
$x-y+3z-4+1(x-y+z-2)=0$, es decir, $x-y+2z-3=0$

Plano que pasa por A y contiene a s: Expresamos primeramente la recta s en forma implícita: $s:\begin{cases}x-3y-6=0\\ x+3z-3=0\end{cases}$

$x-3y-6+\alpha(x+3z-3)=0$ Y como pasa por A(2,-1, 0), $2+3-6+\alpha(2-3)=0\Rightarrow\alpha=-1$, por tanto,
$x-3y-6-1(x+3z-3)=0$, es decir, $\Rightarrow y+z+1=0$
La recta pedida viene dada como intersección de los dos planos obtenidos:

$$\begin{cases}x-y+2z-3=0\\ y+z+1=0\end{cases}$$

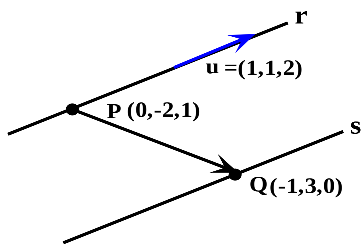
10.- Consideremos las rectas de ecuaciones

$$r:\begin{cases} x+y-z+3=0 \\ -2x+z-1=0 \end{cases} \qquad s:\ x+1=\frac{y-3}{n}=\frac{z}{2}$$

a) Halla n para que r y s sean paralelas.
b) Con el valor de n obtenido, determina la ecuación del plano que contiene ambas rectas.

Solución:

a) Expresaremos la recta r en paramétricas:



$$r:\begin{cases} x+y-z+3=0 \\ -2x+z-1=0 \end{cases} \Rightarrow\ y-x+2=0 \Rightarrow\ y=-2+x$$

Si hacemos $x=\lambda,\ \ y=-2+\lambda$

Sustituyendo en la 2ª ecuación, $z=1+2\lambda$

La recta r queda de la siguiente forma: $r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=-2+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$

Por otra parte, sabemos que s: $x+1=\dfrac{y-3}{n}=\dfrac{z}{2}$

Además, un vector de r es $u=(1,1,2)$ y un vector de s es $v=(1,n,2)$

Para que las rectas sean paralelas sus vectores directores tienen que ser proporcionales, por tanto, $\dfrac{1}{1}=\dfrac{1}{n}=\dfrac{2}{2}\Rightarrow$

$n=1$

b) El plano que contiene a las dos rectas, queda determinado por el punto P y los vectores u y $\overrightarrow{PQ}$ siendo $\overrightarrow{PQ}=(-1,5,-1)$

Su ecuación se obtiene a partir de un determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y+2 & z-1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \end{vmatrix}=0$$

Desarrollando el determinante y simplificando, obtenemos la ecuación siguiente: $11x+y-6z+8=0$

11.- Halla el valor del parámetro a para que los planos siguientes se corten en una recta.

$$\pi_1 : x-y+z=2$$
$$\pi_2 : 2x-y+z=3$$
$$\pi_3 : 3x-y+az=4$$

Determina la ecuación de la recta mencionada en coordenadas paramétricas.

Solución:

Podemos aplicar el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & a & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & a-3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para que se corten en una recta se ha de verificar que $\text{rang}(M)=\text{rang}(M^*)=2$ y ello se verifica si $a-1=0$, es decir, cuando a = 1.

Cuando a = 1, el sistema queda de la siguiente forma:

$$\left.\begin{matrix} x-y+z=2 \\ y-z=-1 \end{matrix}\right\} \text{ y si hacemos } z=\lambda, \text{ resulta } \left.\begin{matrix} x-y=2-\lambda \\ y=-1+\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=1$$

La recta intersección de los planos dados es la siguiente: $r:\begin{cases} x=1 \\ y=-1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

12.- Sea la recta de ecuación $\frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-3}{2}$ y el plano $4x+my+z-2=0$
Halla el valor de m para que sean paralelos.

Solución:
La ecuación de la recta podemos ponerla en la forma siguiente:

$$r:\begin{cases} 4x-4=2y+10 \\ 2y+10=4z-12 \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} 2x-y=7 \\ y-2z=-11 \end{cases}$$

Para que la recta y el plano sean paralelos, el sistema formado por las dos ecuaciones de la recta y la ecuación del plano ha de ser incompatible.

$$\begin{cases} 2x-y=7 \\ y-2z=-11 \\ 4x+my+z=2 \end{cases}$$

Hacemos que el rango de la matriz de coeficientes sea 2: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 4 & m & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 2+8+4m=0 \Rightarrow m=\frac{-5}{2}$

Como podemos encontrar un determinante de orden 3 distinto de cero, el rango de la matriz ampliada es 3, es decir, $\operatorname{rang}(M)=2;\ \operatorname{rang}(M^*)=3$ (Sistema incompatible)
La recta y el plano son paralelos.

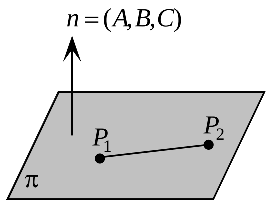
Otra manera:Sea $\pi: Ax+By+Cz+D=0;\ r:\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2}=\frac{z-z_0}{v_3}$

La condición de paralelismo de recta y plano es: $Av_1+Bv_2+Cv_3=0,$ por tanto, $4.2+m.4+1.2=0 \Rightarrow$

$$m=\frac{-5}{2}$$

DISTANCIAS Y ÁNGULOS EN EL ESPACIO

Vector perpendicular a un plano



- Dado un plano π definido por su ecuación general, $Ax+By+Cz+D=0$, el vector: $n=(A,B,C)$ siempre es perpendicular al plano.

- Dados dos puntos cualesquiera del plano: $P_1(x_1,y_1,z_1)$ y $P_2(x_2,y_2,z_2)$, El producto escalar de los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ y n es nulo.

Ejemplo: Ecuación del plano que pasa por P(2, 1, 3) y es perpendicular al vector $v=(-1,3-2)$

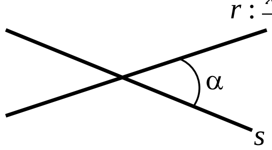
El plano buscado será $-1x+3y-2z+D=0$
Como pasa por el punto P(2, 1, 3), $(-1).2+3.1+(-2).3+D=0,$ es decir, D = 5.
luego la ecuación del plano será : $-x+3y-2z+5=0$

Ángulos

Ángulo formado por dos rectas

Ángulo de dos rectas es el menor de los ángulos formados por sus respectivos vectores de dirección.

$$r:\frac{x-x_0}{u_1}=\frac{y-y_0}{u_2}=\frac{z-z_0}{u_3}$$



$$s:\frac{x-x_1}{v_1}=\frac{y-y_1}{v_2}=\frac{z-z_1}{v_3}$$

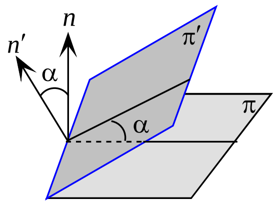
De la definición de producto escalar, se obtiene:

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}=\frac{|u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}}.$$

Tomamos el valor absoluto a fin de obtener el menor de los ángulos que forman las rectas.

Ángulo formado por dos planos

Dos planos $\pi\equiv Ax+By+Cz+D=0$ y $\pi'\equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$,
El ángulo más pequeño que forman es igual o suplementario al que forman sus vectores normales: $n=(A,B,C)$ y $n'=(A',B',C')$
También hemos de tomar el valor absoluto a fin de obtener el menor de los ángulos.



$$\boxed{\cos\alpha=\frac{|n.n'|}{\|n\|.\|n'\|}=\frac{|A.A'+B.B'+C.C'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}}$$

Ejemplos:

1. Calcula el ángulo que formado por las rectas r y s siendo:

$$r:\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-4}{5}\ ;\quad s:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$$

Los vectores de dirección de las respectivas rectas son $u=(1,-1,5)$ y $v=(2,1,-1)$,por tanto,

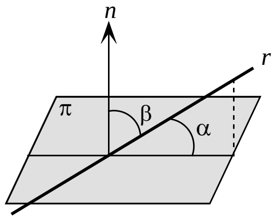
$$\cos\alpha=\frac{|1.2+(-1).1+5.(-1)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+5^2}.\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{|2-1-5|}{\sqrt{27}\sqrt{6}}=\frac{4}{9\sqrt{2}}\Rightarrow\alpha=71{,}68^{\circ}$$

2. Calcula el ángulo que forman los planos $\pi_1:2x-y-3=0;\pi_2:x+y-z=0$

Los vectores perpendiculares a cada uno de los planos son: $n_1=(2,-1,0)$ y $n_2=(1,1,-1)$.

$$\cos\alpha=\frac{|n_1.n_2|}{\|n_1\|.\|n_2\|}=\frac{|2-1+0|}{\sqrt{5}\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{15}},\ \alpha=75{,}03^{\circ}$$

Ángulo formado por una recta y un plano



La recta forma un ángulo β complementario con el vector normal al plano.

$\alpha = 90 - \beta$ (complementarios) o $sen\alpha = \cos\beta$

V. normal: $n = (A, B, C)$

V director: $v = (v_1, v_2, v_3)$

$$sen\alpha = \cos\beta = \frac{|n.v|}{\|n\|.\|v\|} = \frac{|Av_1 + Bv_2 + Cv_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$$

Ejemplo:

Calcula el ángulo que forma la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-1}$ con el plano de ecuación $x + 3y + z - 5 = 0$

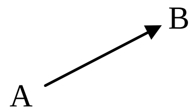
Vector perpendicular al plano: n = (1, 3, 1)

Vector director de la recta v = (1, 2, -1)

$$sen\alpha = \frac{|1.1+3.2+1.(-1)|}{\sqrt{1+9+1}\sqrt{1+4+1}} = \frac{|1+6-1|}{\sqrt{11}\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{66}}; \ \alpha = 47{,}6º$$

Distancias

Distancia entre dos puntos



Distancia entre dos puntos A y B es el módulo del vector que une dichos puntos.

Si las coordenadas de los puntos son $A(x_0, y_0, z_0)$ y $B(x_1, y_1, z_1)$

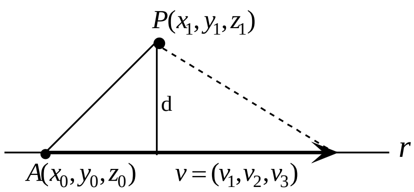
$$d(A,B) = \sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2 + (z_1-z_0)^2}$$

Ejemplo:

Calcula la distancia entre los puntos A(1, 3, 0) y B(−1, 2, 3)

$$d(A,B) = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-3)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$$

Distancia de un punto a una recta



El área del triángulo viene definida por las siguientes fórmulas:

$$Area = \frac{base \times altura}{2} = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times v\|}{2}$$, es decir,

$\|v\|.d = \|\overrightarrow{AP} \times v\|$ y, por tanto, $d = \frac{|\overrightarrow{AP} \times v|}{|v|}$

Ejemplo:

Halla la distancia del punto P(1, −2, 2) a la recta dada por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

Un punto de la recta es A(2, 1, −1)

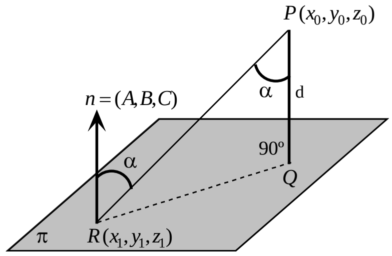
$\overrightarrow{AP} = (-1, -3, \ 3)$

v = (−1, 2, −1), vector director de la recta.

$$\overrightarrow{AP} \times v = \left(\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-3, -4, -5); \ \|v\| = \sqrt{6}$$

$$d(P,r) = \frac{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (-5)^2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{50}{6}} = \sqrt{\frac{25}{3}}$$

Distancia de un punto a un plano



Dado el plano $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ y el punto P

el vector $n = (A, B, C)$ es perpendicular al plano.

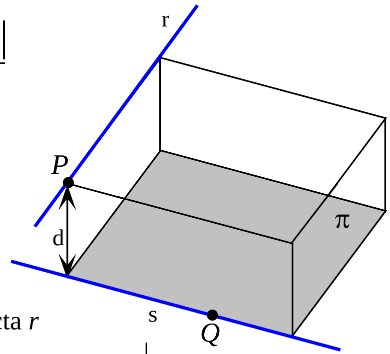
$$\boxed{d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

Ejemplo:

Calcula la distancia del punto P(1, 2, –1) al plano $2x - y + 2z + 3 = 0$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2.1 - 1.2 + 2(-1) + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

Distancia entre dos rectas paralelas



d = área paralelogramo/ base = prod vectorial / |u| $\quad d(r,s) = d(A,s) = \dfrac{|\vec{u} \times \overrightarrow{AB}|}{|\vec{u}|}$

o distancia de un punto genérico de una recta a la otra

Distancia entre dos rectas que se cruzan (*mínima*)

$$r: \frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}; \quad s: \frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2} = \frac{z - z_1}{v_3}$$

- Método del plano paralelo que contiene a una recta:

  a. Hallamos la ecuación del plano π que contiene a la recta *s* y es paralelo a la recta *r*

  por lo que utilizaremos el punto Q y los vectores de las dos rectas: $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$

  b. Después hallamos la distancia de un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la otra recta *r* al plano π

- Método del volumen del paralepípedo.

  Distancia= Volumen paralepípedo/ área del paralelogramo de la base

  Distancia = producto mixto / producto vectorial

$$d(r,s) = h = \frac{V}{A_b} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right]\right|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

Ejemplo:

Posición relativa comprobando que se cruzan y distancia mínima de las rectas $r: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -1 + 4\lambda \end{cases}$

Un punto de r: P(5, –1, 8) y un vector u = (1, 0, 2)

Un punto de s: Q(2, 2, –1) y un vector v = (3, –1, 4) → Vector $\overrightarrow{PQ} = (-3, 3, -9)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ -3 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 9 + 18 - 6 - 12 = 9 \neq 0, \rightarrow \text{se cruzan.} \quad \begin{vmatrix} x - 2 & y - 2 & z + 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \quad 2x + 2y - z + 9 = 0$$

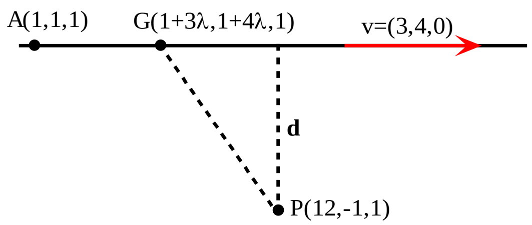
Distancia del punto (5, –1, 8) al plano hallado: $d = \dfrac{|2.5 + 2(-1) - 8 + 9|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \dfrac{9}{3} = 3$

Distancia entre planos paralelos:

$$\pi_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0 \text{ y } \pi_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0 \rightarrow d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ejercicios resueltos

1.- Halla la distancia del punto P(12,-1,1) a la recta r que pasa por A(1,1,1) y tiene como vector de dirección al vector v = (3,4,0)



Solución:

Ecuación de la recta r:

$$\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

G es un punto genérico de la recta.

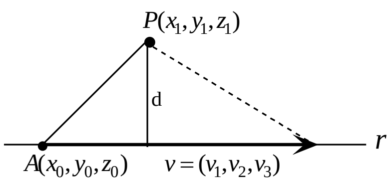
$\overrightarrow{PG}$ es un vector variable y nos interesa el que sea perpendicular a la recta. Entonces se ha de cumplir que

$\overrightarrow{PG}.v = 0 \Rightarrow (1+3\lambda, 1+4\lambda, 1).(3,4,0) = 0$ (producto escalar nulo) y se obtiene $\lambda = 1$

El vector perpendicular a la recta será, por tanto, $\overrightarrow{PG} = (-8,6,0)$

la distancia buscada es el módulo del vector $\overrightarrow{PG}$: $d = \sqrt{(-8)^2 + 6^2 + 0^2} = 10$

Otra manera:



Se aplica la fórmula: $d = \dfrac{\| \overrightarrow{AP} \times v \|}{\| v \|}$

donde A(1,1,1), P(12,-1,1) y v = (3,4,0)

2.- Determina las ecuaciones vectorial, paramétricas y general del plano determinado por los puntos A(1,0,0), B(2,-1,2) y C(5,-1,1). Halla la distancia del punto P(2,7,3) al plano hallado.

Solución:

Elegimos, por ejemplo, el punto A(1,0,0) y formamos los vectores $\overrightarrow{AB} = (1,-1,2)$ y $\overrightarrow{AC} = (4,-1,1)$

Ecuación vectorial: $(x, y, z) = (1,0,0) + \lambda(1,-1,2) + \mu(4,-1,1)$

Ecuaciones paramétricas: $\pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda + 4\mu \\ y = -\lambda - \mu \\ z = 2\lambda + \mu \end{cases}$ Ecuación general: $\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Desarrollando el determinante se obtiene $\pi : x + 7y + 3z - 1 = 0$

La distancia del punto P(2,7,3) al plano hallado, se obtiene aplicando la fórmula

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|1.2 + 7.7 + 3.3|}{\sqrt{1^2 + 7^2 + 3^2}} = \frac{60}{\sqrt{59}}$$

3.- Determina un punto P de la recta $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{2}$ que equidiste de los planos $\pi_1 : x + y + z + 3 = 0$ y

$$\pi_2 : \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -6 + \mu \end{cases}$$

Solución:

Expresamos el plano π_2 en forma cartesiana:

$$\begin{vmatrix} x+3 & y & z+6 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_2 : x + y - z - 3 = 0$$

Pasando a paramétricas la recta, obtenemos un punto genérico: $P(1+2\lambda, -1+\lambda, 3\lambda)$

Como $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$, resulta:

$$\frac{|1.(1+2\lambda)+1.(-1+\lambda)+1.3\lambda+3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{|1.(1+2\lambda)+1.(-1+\lambda)-1.3\lambda-3|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}$$ con lo que se obtiene

$\frac{|6\lambda+3|}{\sqrt{3}}=\frac{|-3|}{\sqrt{3}}$, es decir, $|6\lambda+3|=3\Rightarrow\begin{cases}6\lambda+3=3\\-6\lambda-3=3\end{cases}$

De la primera ecuación obtenemos $\lambda=0$ y de la segunda $\lambda=-1$

Llevando los valores de λ al punto genérico obtenemos dos puntos que equidistan de los planos dados: $P(-1,-2,-3)$ y $P'(1,-1,0)$

4.- dado el plano π de ecuación $x+2y+3z-1=0,$ la recta r de ecuación $r:\begin{cases}x=2z-3\\y=z+4\end{cases}$ y el punto P(2,1,1), calcula:

a) Ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a π

b) Ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r

Solución:

a) El vector característico del plano es un vector director de la recta, es decir, $v=(1,2,3)$

Y teniendo en cuenta que la recta pasa por P(2,1,1),

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$$

b) En la recta r, hacemos $z=\lambda$ y queda de la siguiente forma:

$$r:\begin{cases}x=-3+2\lambda\\y=4+\lambda\\z=\lambda\end{cases}$$

El vector director de la recta es un vector característico del plano buscado.

$$2x+y+z+D=0$$

Como el plano contiene al punto P(2,1,1), $2.2+1+1+D=0\Rightarrow$ D = -6

Ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r: $2x+y+z-6=0$

5.- Halla el simétrico del punto A(0,1,-2) respecto al plano de ecuación $\pi:2x-y-z+5=0$

Solución:

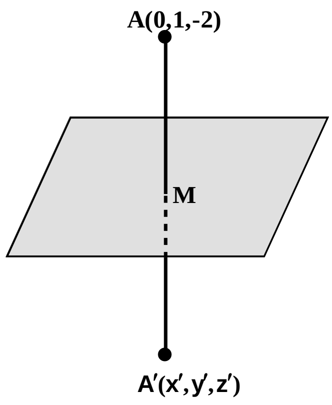
Si la ecuación del plano es $\pi:2x-y-z+5=0$

el vector característico del plano $n=(2,-1,-1)$

será vector director de la recta que pasa por A y A', por tanto,

$$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{-1}=\lambda$$

Y en paramétricas: $\begin{cases}x=2\lambda\\y=1-\lambda\\z=-2-\lambda\end{cases}$



La intersección de la recta y el plano nos da las coordenadas del punto M:

$$2.2\lambda-(1-\lambda)-(-2-\lambda)+5=0\Rightarrow\lambda=-1$$

Sustituyendo λ en la ecuación de la recta obtenemos el punto $M(-2,2,-1)$

El punto M es el punto medio del segmento AA':

$$\frac{0+x'}{2}=-2\Rightarrow x'=-4$$

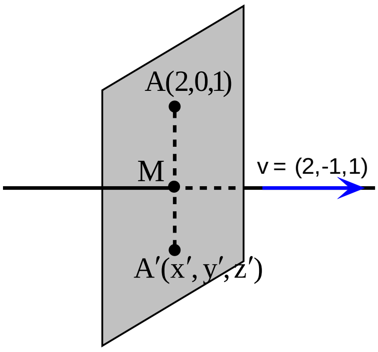
$$\frac{1+y'}{2}=2\Rightarrow y'=3$$

$$\frac{-2+z'}{2} = -1 \Rightarrow z' = 0$$

Coordenadas del punto simétrico de A: $A'(-4,3,0)$

6.- Halla el simétrico de A(2,0,1) respecto de la recta $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z-2}{1}$

Solución:



Plano perpendicular a la recta que pasa por A: $2x - y + z + D = 0$

Como dicho plano contiene al punto A, $2.2 + 1 + D = 0 \Rightarrow$ D = -5

El plano tiene de ecuación $\pi : 2x - y + z - 5 = 0$

Ecuación de la recta dada en paramétricas:

$$\frac{x}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{1} = \lambda \Rightarrow \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

La intersección de la recta y el plano nos da el punto M: $4\lambda - 3 + \lambda + 2 + \lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

Llevando λ a la recta obtenemos $M(4,2,3)$

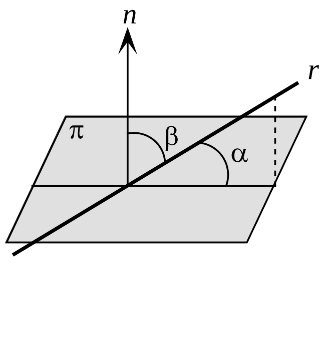
Como M es el punto medio de A y A', si aplicamos las fórmulas del punto medio, resulta:

$$\frac{2+x'}{2} = 4 \Rightarrow x' = 6$$
$$\frac{0+y'}{2} = 2 \Rightarrow y' = 4$$
$$\frac{1+z'}{2} = 3 \Rightarrow z' = 5$$

Las coordenadas del simétrico de A son: $A'(6,4,5)$

7.- Determina el ángulo que forman el plano $\pi : x + 2y - 3z + 4 = 0$ y la recta $r : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x + 2z = 12 \end{cases}$

Solución:



Aplicamos la fórmula $\text{sen}\alpha = \dfrac{|n.v|}{\|n\|.\|v\|}$ donde $n = (A,B,C)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$

En primer lugar ponemos la recta en paramétricas:

$$r : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x + 2z = 12 \end{cases} \Rightarrow y = 2x, \text{ haciendo } x = \lambda,\ y = 2\lambda$$

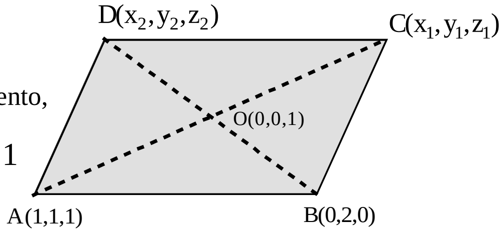
En la 2ª ecuación: $6\lambda + 2z = 12 \Rightarrow z = 6 - 3\lambda$

La recta r queda de la siguiente forma: $r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 6 - 3\lambda \end{cases}$ donde $v = (1,2,-3)$

Y como $n = (1,2,-3)$

$$\text{sen}\alpha = \frac{|n.v|}{\|n\|.\|v\|} = \frac{|1+4+9|}{\sqrt{1+4+9}.\sqrt{1+4+9}} = 1 \Rightarrow \alpha = \text{arcsen}1 = 90^o$$

8.- Dos vértices consecutivos de un paralelogramo son A(1,1,1) y B(0,2,0). El centro del paralelogramo es O (0,0,1). Se pide:
a) Las coordenadas de los otros dos vértices.
b) Ecuación del plano que contiene al paralelogramo
c) Área del paralelogramo.



Solución:

a) Aplicando las fórmulas de las coordenadas del punto medio de un segmento,

$$\frac{1+x_1}{2}=0 \Rightarrow x_1=-1; \quad \frac{1+y_1}{2}=0 \Rightarrow y_1=-1; \quad \frac{1+z_1}{2}=1 \Rightarrow z_1=1$$

Las coordenadas de C son: $C(-1,-1,1)$

Del mismo modo obtenemos $D(0,-2,2)$

b) Ecuación del plano: $\overrightarrow{OA}=(1,1,0); \ \overrightarrow{OB}=(0,2,-1)$

Con el punto O y los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ podemos escribir su ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow x-y-2z+2=0$$

d) El área del paralelogramo podemos calcularla de la forma siguiente:

$$\text{Área}=\|\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB}\|$$

$$\overrightarrow{AD}=(-1,-3,1)$$

$$\overrightarrow{AB}=(-1,1,-1)$$

$$\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB}=\left(\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\right)=(2,-2,-4) \rightarrow \ \text{Área}=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-4)}=\sqrt{24}\ u^2$$

9.- Halla la ecuación del plano π que es perpendicular a $\pi_1: x-6y+z=0$ y contiene a la recta intersección de $\pi_2: 4x-2y+z=2$ y $\pi_3: \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=2+\lambda+\mu \\ z=1+\lambda+2\mu \end{cases}$

Solución:

Ecuación general de π_3 :

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow x-2y+z+1=0$$

$\pi_2 \cap \pi_3: \begin{cases} 4x-2y+z-2=0 \\ x-2y+z+1=0 \end{cases}$ que pasamos a paramétricas resolviendo el sistema:

$\begin{cases} 4x-2y+z-2=0 \\ -x+2y-z-1=0 \end{cases}$ Sumando se obtiene $x=1$

Sustituyendo en una de las dos ecuaciones resulta $z=2y-2$ y haciendo $y=\lambda$,

$$\pi_2 \cap \pi_3: \begin{cases} x=1 \\ y=\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{cases}$$

- Un punto del plano buscado puede ser el de la recta intersección: (1,0,-2)

Los dos vectores que necesitamos serán:

- El vector director de la recta intersección: $v = (0,1,2)$
- El vector característico del plano π_1 : $w = (1,-6,1)$

Ecuación del plano π:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 13x + 2y - z - 15 = 0$$

(Después de desarrollar el determinante y simplificar el resultado)

10.- Halla la ecuación del plano π que es perpendicular a los planos $\pi_1 : 2z + 3y + z = 1,$ y $\pi_2 : 6x + 3y + 2z = 3$ sabiendo que pasa por el punto A(4,1,2).

Solución:
Para determinar un plano necesitamos:

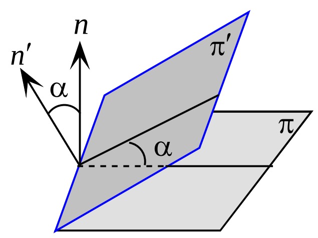
- Un punto
- Dos vectores paralelos al plano y no paralelos entre sí.

El punto lo tenemos.
Los vectores característicos de π_1 y π_2, $v = (2,3,1)$ y $w = (6,3,2)$, son paralelos al plano y no paralelos entre sí.
Por tanto,

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z-2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante, $6(x-4) + 6(y-1) + 6(z-2) - 18(z-2) - 3(x-4) - 4(y-1) = 0,$ es decir,
$\pi : 3x + 2y - 12z + 10 = 0$

11.- Determina una constante a, para que el plano de ecuación $ax + y + z = 2$ forme un ángulo de $\pi/3$ radianes con el plano z = 0



Solución:

Un vector característico del plano $ax + y + z = 2$ es $n = (a,1,1)$

Un vector característico del plano z = 0, es $n' = (0,0,1)$

Aplicando la fórmula $\cos\alpha = \dfrac{|n.n'|}{\|n\| . \|n'\|}$ resulta:

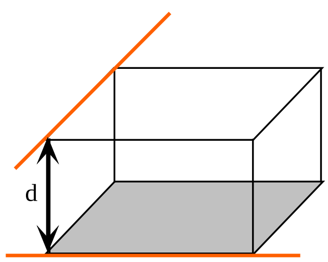
$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{|a.0 + 1.0 + 1.0|}{\sqrt{a^2 + 1^2 + 1^2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 2}} \Rightarrow \sqrt{a^2 + 2} = 2$$

Elevando al cuadrado, $a^2 + 2 = 4 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2}$

12.- dadas las rectas $r : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{1};$ $s : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$
a) Halla la distancia entre las dos rectas
b) Determina la ecuación de la perpendicular común a las dos rectas.

Solución:

a) Plano que contiene a la recta s y es paralelo a r: (zona sombreada)



$$\begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z-1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x+4y-z+12=0$$

Un punto de la recta r es P(2,1,0)

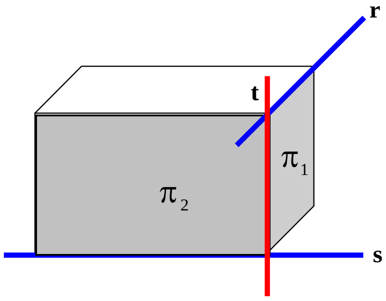
Ahora calculamos la distancia del punto P al plano hallado: $d = \dfrac{|6+4+12|}{\sqrt{3^2+4^2+(-1)^2}} = \dfrac{22}{\sqrt{26}}$

b) la perpendicular común podemos expresarla por la intersección de los dos planos que contienen a cada una de las dos caras sombreadas:

$v = 3,-2,1)$ es un vector director de r

$w = (2,-1,2)$ es un vector director de s

El vector $v \times w$ es perpendicular a cada uno de los vectores dados:



$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3i-4j+k = (-3,-4,1)$$

Plano π_1 : $\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$; Plano π_2 : $\begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z-1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Ejercicios propuestos con solución:

Parte 1

1.- Halla el valor de m para que los puntos $A(1,2,0)$, $B(0,3,-1)$, $C(1,0,1)$ y $D(-1,2,m)$ sean coplanarios.

Sol. m = – 1

2.- Calcula el volumen del tetraedro determinado por los puntos $A(-1,0,1)$, $B(2,-4,0)$, $C(1,1,1)$ y $D(-3,0,0)$

Sol. $V = \frac{3}{2} u^3$

3.- Estudia la posición relativa de las rectas $r: \dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z}{1}$; $s: \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2t \\ z = 5 \end{cases}$

Sol. Se cortan en el punto (-3,28,5)

4.- Halla la ecuación de un plano paralelo al plano de ecuación $x-2y+z+5=0$ y que pase por el punto P(1, 0, 8)

Sol. $x-2y+z-9=0$

5.- Calcula el área del triángulo cuyos vértices son las intersecciones del plano $x+2y+3z=1$ con los ejes de coordenadas.

Sol. $A = \dfrac{\sqrt{14}}{12} u^2$

6.- Estudia la posición relativa de la recta $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{-1}$ y el plano de ecuación $2x-y+3z-8=0$

Sol. La recta y el plano son paralelos

7.- Estudia la posición relativa de los siguientes planos:

$$\pi_1 : -x - 2y + 3z - 5 = 0$$
$$\pi_2 : 2x + 4y - 6z - 1 = 0$$
$$\pi_3 : 3x + 2y - 4z + 6 = 0$$

Sol. π_1 y π_2 son paralelos. El tercero es secante a los otros dos.

8.- Escribe la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a la recta cuyas ecuaciones paramétricas son

$$r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

9.- Halla m para que las rectas $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+5}{-3} = \dfrac{z+1}{2}$ $\quad s : \dfrac{x}{4} = \dfrac{y-m}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$ sean secantes.

Sol. m = 11

10.- Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos A(5, 0, 1), B(4, 1, 0) y es paralelo a la recta

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + y - z = 5 \end{cases}$$

Sol. $2x + y - z - 9 = 0$

11.- Un plano contiene a las rectas $r : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{1}$ y $s : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-3}{2}$. Halla su ecuación.

Sol. $2x - y - z + 3 = 0$

12.- Dada una recta r, de ecuación $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{4}$, halla:

a) Las ecuaciones de dos planos que determinan r.
b) En el haz formado por los planos que determinan r, halla el que pasa por el punto $A(0,-3,2)$

Sol. $\begin{cases} 2x - 3y + 7 = 0 \\ 2y - z - 2 = 0 \end{cases}$; $\quad 10x + y - 8z + 19 = 0$

13.- Halla la ecuación de la recta t, que pasa por el punto A(1, 0, -2) y corta las rectas siguientes:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}; \quad s : \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{3}$$

Sol. $t : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$

Parte 2. Distancias y ángulos

1.- Estudia si las rectas $r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases}$ $\quad s : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$ se cruzan en el espacio. Encuentra la distancia entre ellas.

Solución: Escogemos un punto y un vector de cada recta.
Como el determinante formado por el vector que uno los puntos de ambas rectas y los vectores directores es distinto de cero, las rectas se cruzan. Distancia entre r y s: $\sqrt{2}$

2.- Se dan las rectas $r:\begin{cases} x-2y=-1 \\ y-z=1 \end{cases}$ $s:\begin{cases} x-2z=5 \\ x-y-z=1 \end{cases}$

a) Investiga si son paralelas.
b) En caso afirmativo, halla la ecuación del plano que las contiene

Solución:
Hacemos $z=\lambda$ y las expresamos en paramétricas.
a) Las rectas son paralelas porque los vectores directores son proporcionales.
b) Escogemos un punto de cada recta y formamos el vector que une ambos puntos.
Con dicho vector, un vector director de una de ellas y uno de los dos puntos que conocemos, escribimos la ecuación del plano: $3x-4y-2z+1=0$

3.- Determina las coordenadas del punto simétrico de A(-3,1,-7), respecto de la recta $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{2}$

Solución:
Hallamos un plano perpendicular a la recta que pasa por A.
A continuación buscamos la intersección de la recta y el plano. El punto de intersección es el punto medio de A y su simétrico A' $A'(-3,-3,-3)$

4.- Las rectas $\frac{x}{-1}=\frac{y}{-4}=\frac{z}{0}$ y $\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$, se cruzan en el espacio. Calcula la distancia entre ellas y la ecuación de la recta perpendicular común a ambas rectas.

Solución: $d=\sqrt{\frac{14}{3}}$ Recta perpendicular común: $\begin{cases} x=-4\lambda \\ y=\lambda \\ z=5\lambda \end{cases}$

5.- Halla la distancia entre las rectas $r:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{1};\ \ s:\frac{x-5}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{2}$

Solución: $\sqrt{3}$

6.- Comprueba que la recta $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-7}{-1}$ es paralela al plano $x+2y+3z=0$ y halla la distancia de la recta al plano.

Solución: El producto escalar del vector director de la recta y del vector característico del plano ha de ser nulo. (Condición de paralelismo de recta y plano) $d=\frac{14}{\sqrt{3}}$

7.- Halla la recta que pasa por A(1,0,2) y es paralela a los planos $x-2y+3z+1=0$ y $2x-3y+z+6=0$

Solución: $\frac{x-1}{7}=\frac{y}{5}=\frac{z-2}{1}$

8.- Las rectas $r:\begin{cases} x+y-z=4 \\ x+2y=7 \end{cases}$ $s:\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$ se cruzan en el espacio.
Escribe las ecuaciones paramétricas de ambas rectas.
Halla un punto de r y otro punto de s tales que el vector con origen en uno y extremo en el otro, sea perpendicular a ambas rectas.

Solución:

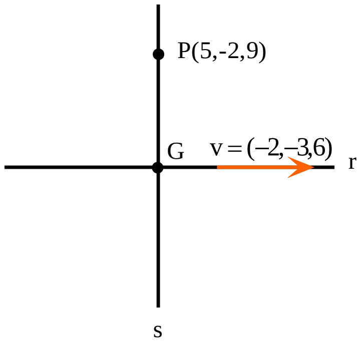
a) $r:\begin{cases} x=7-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=3-\lambda \end{cases}$ $:\begin{cases} x=2 \\ y=-5 \\ z=\mu \end{cases}$

a) Tomamos un punto genérico de r y un punto genérico de s:
$P(7-2\lambda,\lambda,3-\lambda)$; $Q(2,-5,\mu)$

El vector $\overrightarrow{PQ}$ ha de ser perpendicular a cada uno de los vectores directores de las rectas dadas. (Producto escalar nulo)
Resolviendo el sistema se obtiene $\lambda=1,\ \mu=2$ valores que llevados a P y Q nos dan los puntos
$P(5,1,2)$ y $Q(2,-5,2)$

9.- Considera el punto P(5,-2,9) y la recta $r: \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z}{6}$

a) Calcula la ecuación de la recta s que corta perpendicularmente a r y pasa por P.
b) Halla el punto de corte de las dos rectas.



Solución:
a) Expresamos r en paramétricas y tomamos un punto genérico de la misma:
$G(1-2\lambda,-1-3\lambda,6\lambda)$

Como el producto escalar de $\overrightarrow{PG}$
y v ha de ser nulo, obtenemos λ = 1

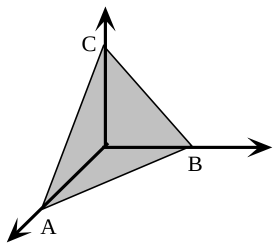
Obtenido $\overrightarrow{PG}$, la ecuación de la recta s será: $\dfrac{x-5}{-6}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-9}{-3}$

b) Punto de corte: $G(-1,-4,6)$

10.- Sea el plano $\pi: x-2y+4z=12$ y el punto P(2,-1,1)

a) Calcula la distancia d entre el plano π y el punto P.
b) Halla la ecuación de un plano paralelo a π y distinto del mismo, que también diste de P la misma distancia d.
c) Calcula el volumen de la figura limitada por el plano π y los tres planos coordenados.

Solución: a) $\dfrac{4}{\sqrt{21}}$



b) $\pi': x-2y+4z-4=0$

c) La coordenadas de los vértices
A(12,0,0), B(0,-6,0) y C(0,0,3)
$\text{Volumen}=36\,u^2$