Tabla de integrales inmediatas

Particular	General
$\int dx = x + C$ nota: $\int dx = \int 1 \cdot dx$	$\int K \cdot dx = K \cdot x + C$ con $K = \text{constante}$
$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ para $n \neq -1$	$\int f^n \cdot f' \cdot dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C$ para $n \neq -1$
$\int \frac{1}{x} dx = \mathrm{Ln}\, x + C$ con $x > 0$	$\int \frac{f'}{f} dx = \mathrm{Ln}\, f + C$ con $f > 0$
$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\mathrm{Ln}\, a} + C$ con $a > 0$	$\int a^f \cdot f' \cdot dx = \frac{a^f}{\mathrm{Ln}\, a} + C$ con $a > 0$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^f \cdot f' \cdot dx = e^f + C$
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$	$\int \frac{f'}{2\sqrt{f}} dx = \sqrt{f} + C$
$\int \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}} dx = \sqrt[n]{x} + C$	$\int \frac{f'}{n \sqrt[n]{f^{n-1}}} dx = \sqrt[n]{f} + C$
$\int \mathrm{sen}x \, dx = -\cos x + C$	$\int f' \cdot \mathrm{sen}(f) \cdot dx = -\cos(f) + C$
$\int \cos x \, dx = \mathrm{sen}\, x + C$	$\int f' \cdot \cos(f) \cdot dx = \mathrm{sen}(f) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg}\, x + C$	$\int \frac{f'}{\cos^2(f)} dx = \mathrm{tg}(f) + C$
$\int \frac{-1}{\mathrm{sen}^2 x} dx = \mathrm{cotg}\, x + C$	$\int \frac{-f'}{\mathrm{sen}^2(f)} dx = \mathrm{cotg}(f) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \mathrm{arc\,sen}\, x + C$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \mathrm{arc\,sen}(f) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \mathrm{arc\,cos}\, x + C$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \mathrm{arc\,cos}(f) + C$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{arc\,tg}\, x + C$ $\int \frac{1}{a+x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) + C$ con $a > 0$	$\int \frac{f'}{1+f^2} dx = \mathrm{arc\,tg}(f) + C$ $\int \frac{f'}{a+f^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{f}{\sqrt{a}}\right) + C$ con $a > 0$

Tabla de integrales inmediatas con ejemplos

TIPOS	EJEMPLOS
Tipo potencial $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\int \sqrt{x^3}dx = \int x^{\frac{3}{2}}.dx = \frac{x^{3/2+1}}{3/2+1} = \frac{x^{5/2}}{5/2} = \frac{2\sqrt{x^5}}{5}$
Tipo logarítmico $\int \frac{f'}{f}dx = L\lvert f \rvert$	$\int \frac{e^x}{1+e^x}dx = L(1+e^x)$
Tipo exponencial $\int f'.e^f.dx = e^f$ $\int f'.a^f.dx = \frac{a^f}{La}$	$\int e^{-2x}dx = \frac{1}{-2}\int (-2)e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}$ $\int 5^x.9^x.dx = \int 45^x dx = \frac{45^x}{L45}$
Tipo coseno $\int senxdx = -\cos x$ $\int f'.senf.dx = -\cos f$	$\int \operatorname{sen}\frac{x}{3}dx = 3\int \frac{1}{3}.\operatorname{sen}\frac{x}{3}dx = -3\cos\frac{x}{3}$
Tipo seno $\int \cos x = senx$ $\int f'.\cos f.dx = senf$	$\int \cos(2x+5)dx = \frac{1}{2}\int 2.\cos(2x+5)dx = \operatorname{sen}(2x+5)$
Tipo tangente $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx$ $\int \frac{f'}{\cos^2 f}dx = tgf$	$\int \operatorname{tg}^2 xdx = \int (1+\operatorname{tg}^2 x - 1)dx = \operatorname{tg} x - x$ $\int \frac{x}{\cos^2(5x^2-3)} = \frac{1}{10}\int \frac{10x}{\cos^2(5x^2-3)} = \frac{1}{10}\operatorname{tg}(5x^2-3)$
Tipo cotangente $\int \frac{1}{sen^2 x}dx = -\cot gx$ $\int \frac{f'}{sen^2 f}dx = -\cot gf$	$\int \cot g^2 xdx = \int (1+\cot g^2 x - 1)dx = -\cot gx - x$ $\int \frac{x}{\operatorname{sen}^2 3x^2}dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x}{\operatorname{sen}^2 3x^2}dx = -\frac{1}{6}\cot g3x^2$
Tipo arc senx (= −arc cosx) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arc\ senx$ $\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}dx = arc\ senf$	$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}dx = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}x^2$ $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}}dx = \operatorname{arcsen} e^x$
Tipo arco tang.(= -arc cotang.) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = arc\ \operatorname{tgx}$ $\int \frac{f'}{1+f^2}dx = arc\ tgf$	$\int \frac{1}{3+3x^2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x$ $\int \frac{1}{1+9x^2}dx = \int \frac{1}{1+(3x)^2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3}{1+(3x)^2}dx = \frac{1}{3}arc\ \operatorname{tg}(3x)$

METODOS DE INTEGRACION

0. INTEGRALES CUASI INMEDIATAS:

Pueden calcularse a partir de la tabla de integrales; generalmente se ha de ajustar una constante para que un factor resulte ser la derivada de una función que aparece en el integrando.

Ejemplo 1: En la integral $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$, el numerador es una función compuesta de las funciones senx y $\sqrt{x}$;

la derivada de $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, de manera que multiplicando y dividiendo por 2:

$\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{2\operatorname{sen}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx = 2\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = 2\int \operatorname{sen}\sqrt{x}(\sqrt{x})'dx$ = (aplicando la tabla de integrales quasi-inmediatas con f(x) = $\sqrt{x}$) = - 2cos($\sqrt{x}$) + k.

Ejemplos de integrales que se transforman en inmediatas *(casi-inmediatas)*

1. $$\int \frac{1}{x^5}dx = \int x^{-5}dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} = \frac{x^{-4}}{-4} = -\frac{1}{4x^4}$$

2. $$\int \frac{\operatorname{sen}x - \cos x}{\operatorname{sen}x + \cos x}dx = -\int \frac{\cos x - \operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x + \cos x}dx = -L|\operatorname{sen}x + \cos x|$$

3. $$\int \frac{e^{\operatorname{arcsen}x}}{\sqrt{1-x^2}}.dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.e^{\operatorname{arcsen}x}.dx = e^{\operatorname{arcsen}x}$$

4. $$\int \sec^2(2x+1)dx = \frac{1}{2}\int 2.\sec^2(2x+1)dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}(2x+1)$$

5. $$\int \sec^2\frac{x}{3}dx = 3\int \frac{1}{3}.\sec^2\frac{x}{3}dx = 3tg\,\frac{x}{3}$$

6. $$\int \frac{2^x}{1+4^x}dx = \frac{1}{L2}\int \frac{2^x.L2}{1+(2^x)^2}dx = \frac{1}{L2}\operatorname{arctg}2^x$$

7. $$\int \frac{1}{\operatorname{tg}x}dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}dx = L|\operatorname{sen}x| + C$$

8. $$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}L(x^2+1)$$

1.- METODO DE INTEGRACION POR PARTES.

Se utiliza este método cuando en la expresión a integrar se aprecia la existencia de dos funciones sin que ninguna de ellas sea derivada de la otra. La fórmula a emplear es la siguiente: $\int u.dv = u.v - \int v.du$

Ejemplos:

1.- $\int 3x^2 \ln x dx$,

Solución:

Elegimos $3x^2$ la función a integrar y **u**= lnx la función a derivar, Donde **u** se deriva y **dv** se integra

$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x}dx,$

$dv = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad v = x^3$, con lo que:

$$\int 3x^2 \ln x dx = x^3 \ln x - \int \frac{1}{x} x^3 dx = x^3 \ln x - \int x^2 dx = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} + k.$$

2.- $\int arctgx \cdot dx$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} u = arc\ tgx \\ dv = dx \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ v = x \end{array}$$

Aplicando la fórmula que hemos indicado anteriormente, $I = x.\mathrm{arctg}\, x - \int x.\frac{1}{1+x^2}dx$

La integral resultante es de tipo logarítmico: $I = x.\mathrm{arctg}\, x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = x.\mathrm{arctg}\, x - \frac{1}{2}L(1+x^2)$ +C

3.- $\int x^2 senxdx$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = \mathrm{sen}\, xdx \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} du = 2xdx \\ v = \int \mathrm{sen}\, xdx = -\cos x \end{array}$$

I= $-x^2 \cos x + \int 2x \cos xdx$. (*) A veces hay que repetir la integración por partes como en este caso:

$$\left.\begin{array}{l} u = 2x \\ dv = \cos xdx \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} du = 2dx \\ v = \int \cos xdx = \mathrm{sen}\, x \end{array}$$

$$\int 2x \cos xdx = 2x\,\mathrm{sen}\, x - \int 2\,\mathrm{sen}\, xdx = 2x\,\mathrm{sen}\, x + 2\cos x$$

Y volviendo a la expresión (*) obtenemos el resultado final:

$$I = -x^2 \cos x + 2x\ \mathrm{sen} x + 2\cos x + \mathrm{C}$$

2.-METODO DE SUSTITUCION O CAMBIO DE VARIABLE.

Consiste en sustituir la variable x por otra variable t mediante una nueva función g tal que x=g(t) a fin de transformar el integrando en otro más sencillo.

Ejemplos:

1.- $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$,

cambiando la variable x por t^2 (para eliminar la raíz) $x = t^2$, con lo que $dx = 2tdt$ y la integral queda:

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx = \int \frac{2t}{t^2+t}dt = \int \frac{2}{t+1}dt = 2\ln|t+1| + k = \ln(t+1)^2 + k.$$

Deshaciendo el cambio, $t = \sqrt{x}$, se tiene: $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx = \ln(\sqrt{x}+1)^2 + k.$

2.- $\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$

Hacemos el cambio $\sqrt{x-1} = t$ y elevando al cuadrado, $x-1 = t^2$

Diferenciando la igualdad anterior, $dx = 2t.dt$

Por otra parte, de $x-1 = t^2$ resulta $x = 1+t^2$

Sustituyendo resulta: $\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx = \int \frac{1}{(1+t^2).t}.2tdt = 2\int \frac{1}{1+t^2}dt = 2arctgt = 2arctg\sqrt{x-1} + C$

3.- $\int x^2\sqrt{1+x^3}dx$

Hacemos el cambio $\sqrt{1+x^3} = t \Rightarrow 1+x^3 = t^2 \Rightarrow 3x^2dx = 2tdt$

Despejamos en forma adecuada: $x^2dx = \frac{2tdt}{3}$ y ahora sustituimos:

$$\int x^2\sqrt{1+x^3} = \int \sqrt{1+x^3}.x^2dx = \int t.\frac{2tdt}{3} = \frac{2}{3}\int t^2dt = \frac{2}{3}\frac{t^3}{3} = \frac{2\sqrt{(1+x^3)^3}}{9}$$

4.- $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx$

Hacemos el cambio $x^2+x+1 = t \Rightarrow (2x+1)dx = dt$

Sustituyendo en la integral resulta:

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}dt = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2+x+1} + C$$

5.- $\int sen^2x\cos^3 xdx$

El cambio que podemos realizar es el siguiente: senx=t (Por ser impar en cosx)

De dicho cambio resulta: cosxdx=dt y sustituyendo en la integral propuesta obtenemos:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x dx = \int \operatorname{sen}^2 x.\cos^2 x.\cos x dx = \int t^2(1-t^2)dt =$$

$$= \int (t^2 - t^4)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + C$$

6.- $\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} dx$

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2$$

$$dx = 2tdt$$

$$\int \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}} 2tdt = 2\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = 2 \operatorname{arcsen} t = 2 \operatorname{arcsen} \sqrt{x}$$

Otros:

$$\int \frac{x^2}{x^3-2} dx = \frac{1}{3} Ln\left|x^3 - 2\right| + C$$

$$x^3 = t \Rightarrow 3x^2 dx = dt$$

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C$$

$$\operatorname{arctg} x = t \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} dx = dt$$

$$\int \cos\left(x^2\right) 2x \; dx = \operatorname{sen} x^2 + C$$

$$x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt$$

$$\int 2xe^{x^2} dx = e^{x^2} + C$$

$$x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt$$

$$\int \frac{1}{xLnx} dx = Ln(Lnx)$$

$$Lnx = t \Rightarrow {}^{1}\!/_{x} dx = dt$$

$$MEJOR\ USAR: \int \frac{f'}{f} = Lnf \quad reescribiendo \quad \int \frac{1}{xLnx} dx = \int \frac{{}^{1}\!/_{x}}{Lnx} dx = Ln(Lnx)$$

3.-METODO DE DESCOMPOSICION EN FRACCIONES SIMPLES

Consiste en separar la función racional en sumas de funciones racionales. Suponemos que el grado del numerador es menor que el grado del denominador , pues en caso contrario, se hace la división y después se integra el cociente más el resto partido por el divisor, es decir,

$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ donde el grado de p(x) es igual o mayor que el de q(x), entonces,

p(x)	q(x)
r	c(x)

p(x) = q(x) · c(x) + r o bien: $\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r}{q(x)}$

$$\textbf{Por tanto:} \quad \int \frac{p(x)}{q(x)} = \int \left(c(x) + \frac{r}{q(x)}\right)dx$$

Ejemplos cómo se procede:

1.- $\int \frac{x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 5}{x^3 + x^2 - x - 1}dx$,

El primer paso consiste en realizar la división para que la función racional quede con numerador de grado menor al del denominador.

$$\frac{x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 5}{x^3 + x^2 - x - 1} = x - \frac{x - 5}{x^3 + x^2 - x - 1}, \text{ con lo que :}$$

$$\int \frac{x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 5}{x^3 + x^2 - x - 1}dx = \int xdx - \int \frac{x - 5}{x^3 + x^2 - x - 1}dx.$$

Calculando por otro lado la integral $\int \frac{x - 5}{x^3 + x^2 - x - 1}dx$:

$$\frac{x - 5}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{x - 5}{(x - 1)(x + 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2} = \frac{A(x + 1)^2 + B(x - 1)(x + 1) + C(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)^2}.$$

La igualdad $x - 5 = A(x + 1)^2 + B(x - 1)(x + 1) + C(x - 1)$, se verificará para cualquier valor de x;
para x = -1, -6 = 2C; C = 3,
para x = 1, -4 = 4A; A = -1,
para x = 0, -5 = A - B - C; B = 1.

$$\int \frac{x - 5}{x^3 + x^2 - x - 1}dx = \int \frac{-1}{x - 1}dx + \int \frac{1}{x + 1}dx + \int \frac{3}{(x + 1)^2}dx =$$

$$= -\ln|x - 1| + \ln|x + 1| - \frac{3}{x + 1} + k_1 = \ln\left|\frac{x + 1}{x - 1}\right| - \frac{3}{x + 1} + k_1.$$

Finalmente:

$$\int \frac{x - 5}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{x^2}{2} - \ln\left|\frac{x + 1}{x - 1}\right| + \frac{3}{x + 1} + k.$$

2.- $\int \frac{x^2}{2x+1}dx$

Solución:

Dado que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, hemos de realizar la división con lo que se obtiene el siguiente cociente y resto: C(x)=$\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$; R=$\frac{1}{4}$

$$\int \frac{x^2}{2x+1}dx=\int \left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+\frac{\frac{1}{4}}{2x+1}\right)dx=\int \frac{1}{2}xdx-\int \frac{1}{4}dx+\frac{1}{4}\int \frac{1}{2x-1}dx=$$

$$\frac{1}{2}\int xdx-\frac{1}{4}\int dx+\frac{1}{8}\int \frac{2}{2x-1}dx=\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}L\left|2x-1\right|+C$$

3.- $\int \frac{1}{x^2-5x+6}dx$

Solución:

Buscamos las raices del denominador resolviendo la ecuación $x^2-5x+6=0 \rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}=\begin{cases}3\\2\end{cases}$

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{(x-3)(x-2)}=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x-2}=\frac{a(x-2)+b(x-3)}{(x-3)(x-2)}$$

Como los denominadores son iguales los numeradaores también lo serán, por tanto, 1=a(x-2)+b(x-3)

Y dando a **x** loa valores de **2** y **3** se obtienen los valores de **a** y **b**: Para x=2, 1=-b Para x=3, 1=a

$$\int \frac{1}{x^2-5x+6}dx=\int \frac{1}{x-3}dx-\int \frac{1}{x-2}dx=L\left|x-3\right|-L\left|x-2\right|+C$$

4.- $\int \frac{3x-1}{x^2+x}dx$

Solución:

En este caso la descomposición en fracciones simples es más sencilla:

$$\frac{3x-1}{x^2+x}=\frac{3x-1}{x(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}=\frac{a(x+1)+bx}{x(x+1)}$$

$3x-1=a(x+1)+bx$ Las raices del denominador son **0** y **–1:**

Para x= –1, b = 4
Para x = 0, a = –1

$$\int \frac{3x-1}{x^2+x}dx=\int \frac{-1}{x}dx+\int \frac{4}{x+1}dx=-L\left|x\right|+4L\left|x+1\right|+C$$

CÁLCULO DE INTEGRALES

1.-Cálcula las siguientes integrales:

a) $\int xe^{x}dx$ ***;*** ***b)*** $\int x\,\mathrm{sen}\,xdx$ ***;*** ***c)*** $\int xLxdx$ ***;***

Solución: Todas ellas se resuelven por partes y la fórmula del método es

$$\int u.dv = u.v - \int v.du$$

a) $I = \int xe^{x}dx$ **.**

$$\left.\begin{aligned} u &= x \\ dv &= e^{x}.dx \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} du &= dx \\ v &= \int e^{x}dx = e^{x} \end{aligned}$$

$$I = xe^{x} - \int e^{x}dx = xe^{x} - e^{x} + \mathrm{C}$$

b) I= $\int x\,\mathrm{sen}\,x.dx$

$$\left.\begin{aligned} u &= x \\ dv &= \mathrm{sen}\,x.dx \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} du &= dx \\ v &= \int \mathrm{sen}\,xdx = -\cos x \end{aligned}$$

$$I = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \mathrm{sen}\,x + C$$

c) $I = \int xLxdx$

$$\left.\begin{aligned} u &= Lx \\ dv &= xdx \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} du &= \frac{1}{x}dx \\ v &= \int xdx = \frac{x^{2}}{2} \end{aligned}$$

$$I = \frac{x^{2}}{2}.Lx - \int \frac{x^{2}}{2}.\frac{1}{x}.dx = \frac{x^{2}}{2}.Lx - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^{2}}{2}.Lx - \frac{x^{2}}{4} + C$$

2.-Integra las siguientes funciones racionales:

a) $\int \frac{2x+1}{x^{2}+x-6}dx$***;*** ***b)*** $\int \frac{x-1}{x^{2}-2x-6}dx$ ***c)*** $\int \frac{1+2x}{1+x^{2}}dx$***;*** ***d)*** $\int \frac{x^{2}+1}{x-1}dx$

Solución:

a) La primera es inmediata ya que el numerador es exactamente la derivada del denominador, por tanto,

$$\int \frac{2x+1}{x^{2}+x-6}dx = L\left|x^{2}+x-6\right| + C$$

b) La segunda se resuelve buscando la derivada del denominador:

$$\int \frac{x-1}{x^{2}-2x-6}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^{2}-2x-6}dx = \frac{1}{2}.L\left|x^{2}-2x-6\right| + C$$

c) La tercera la descomponemos en dos integrales:

$$\int \frac{1+2x}{1+x^{2}}dx = \int \frac{1}{1+x^{2}}dx + \int \frac{2x}{1+x^{2}}dx = \mathrm{arctg}\,x + L(1+x^{2}) + C$$

d) La cuarta se resuelve realizando previamente la división. Y podemos realizarla por Ruffini

Hecha la división se obtiene de cociente x+1 y de resto 2

$$\int \frac{x^{2}+1}{x-1}dx = \int \left(x+1+\frac{2}{x-1}\right)dx = \frac{x^{2}}{2} + x + 2L\left|x-1\right| + C$$

3.-Calcula las siguientes integrales:

a) $\int x^2 e^x dx$ ***;*** ***b)*** $\int x^2 \cos 3x dx$

Solución: Las dos se resuelven aplicando el método de integración por partes dos veces:

a) $\int x^2 e^x dx$

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = e^x dx \end{array}\right\} \begin{array}{l} du = 2xdx \\ v = \int e^x dx = e^x \end{array}$$

$I = x^2 e^x - \int 2xe^x dx$; $I = x^2 e^x - I_1$ (*) donde $I_1 = \int 2xe^x dx$

Hacemos nuevamente

$$\left.\begin{array}{l} u = 2x \\ dv = e^x dx \end{array}\right\} \begin{array}{l} du = 2dx \\ v = \int e^x dx = e^x \end{array}$$

$I_1 = 2xe^x - \int 2e^x dx = 2xe^x - 2e^x$

Y volviendo nuevamente a la expresión (*) obtenemos el resultado final:

$$I = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

b) $\int x^2 \cos 3x dx$

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = \cos 3x dx \end{array}\right\} \begin{array}{l} du = 2xdx \\ v = \int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\int 3\cos 3x dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x \end{array}$$

$I = \frac{1}{3}x^2 \operatorname{sen} 3x - \int \frac{2}{3} x \operatorname{sen} 3x dx$. Aplicamos nuevamente el método de integración por partes:

$u = \frac{2}{3}x$; dv = sen3xdx.

$du = \frac{2}{3}dx$; v = $\int$sen3xdx $= \frac{1}{3}\int 3\operatorname{sen} 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x$

$$\int \frac{2}{3} x \operatorname{sen} 3x dx = -\frac{2}{9} x \cos 3x + \int \frac{2}{9}\cos 3x dx = -\frac{2}{9} x \cos 3x + \frac{2}{27}\int 3\cos 3x dx =$$

$$= -\frac{2}{9} x \cos 3x + \frac{2}{27}\operatorname{sen} 3x$$

$$I = \frac{1}{3}x^2 \operatorname{sen} 3x + \frac{2}{9} x \cos 3x - \frac{2}{27}\operatorname{sen} 3x + C$$

4.-Integra la siguiente función racional: ***I=*** $\int \frac{2x+1}{x^2 - 5x + 6} dx$

Solución:

Como no puede obtenerse en el numerador la derivada del denominador, utilizaremos el método de descomposición en fracciones simples, ya que el denominador tiene raices reales.

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

$$\frac{2x+1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{2x-1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x-3)}{(x-3)(x-2)}$$

Como los numeradores son iguales los denominadores también lo serán:

$$2x+1=A(x-2)+B(x-3)$$

Para x = 3, 7 = A; Para x = 2, 5 = – B

(A x se le han dado los valores de las raices del denominador.).

Ahora procedemos de la siguiente manera:

$$I=\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx=\int \frac{7}{x-3}dx+\int \frac{-5}{x-2}dx = 7L\,|x-3|-5L\,|x-2|$$

5.-Calcula por el método más adecuado las siguientes integrales:

a) $\int \frac{1}{(x-1)^2}dx;$ ***b)*** $\int \frac{x-1}{3x^2-6x+5}dx$

Solución

a) La primera la resolvemos por un sencillo cambio de variable:

$$x-1=t \Rightarrow dx=dt$$

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}dx=\int \frac{1}{t^2}dt=\int t^{-2}dt=\frac{t^{-1}}{-1}=-\frac{1}{t}=-\frac{1}{x-1}+C$$

b) La segunda es una integral en la que el numerador puede transformarse en la derivada del denominor:

$$\int \frac{x-1}{3x^2-6x+5}dx=\frac{1}{6}\int \frac{6x-6}{3x^2-6x+5}dx=\frac{1}{6}L\left|3x^2-6x+5\right|+C$$

6.-La función f(x)=2x+5 tiene infinitas primitivas que difieren en una constante. ¿Cuál de estas funciones toma el valor 18 para x=2?

Solución:

$\int (2x+5).dx=x^2+5x+C$ Como toma el valor 18 para x=2 resulta: $2^2+5.2+C=18 \Rightarrow C=4$.

La función buscada es: $F(x)=x^2+5x+4$

7.-Halla una función cuya derivada sea $f(x)=4x^2-7x^2+5x-1$ ***y que se anule para x=1***.

Solución:

Buscamos la integral indefinida de f(x) que es:

$$\int (4x^3-7x^2+5x-1).dx=x^4-\frac{7x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-x+C$$

Como se anula para x=1 tenemos: $1^4-\frac{7.1^3}{3}+\frac{5.1^2}{2}-1+C=0$ y se obtiene que C= - 1/6,

por tanto, la función buscada es $F(x)=x^4-\frac{7x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-x-\frac{1}{6}$

8.-Halla la función G tal que G"(x)=6x+1; G(0)=1 y G(1)=0

Solución:

Nos dan la segunda derivada por lo que tenemos que integrar dos veces:

$$G'(x) = \int (6x+1)dx = 3x^2 + x + C$$

$$G(x) = \int (3x^2 + x + C)dx = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + Cx + D$$

De G(0)=1 resulta: D=1 , (después de sustituir la x por 0.)

De G(1)=0 obtenemos: 1+1/2+C+1=0 ,(después de sustituir la x por 1) por lo que

C = -5/2.

La función que buscamos es la siguiente: $G(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 1$

9.-Dada la función f(x)=6x halla la primitiva que pasa por el punto A(1,2).

Solución: Hallamos la integral indefinida: $\int 6xdx = 3x^2 + C$

que es el conjunto de todas sus primitivas.

Ahora buscamos la que pasa por el punto (1,2):

$3.1^2 + C = 2$ lo que indica que C= −1, por tanto, la primitiva buscada es $F(x) = 3x^2 - 1$

10.-Resolver la integral $\int \operatorname{sen}^5 xdx$

Solución: Es impar en senx por lo que hacemos el cambio cosx=t

con lo que -senx.dx=dt. Entonces:

$$\int \operatorname{sen}^5 x.dx = \int \operatorname{sen}^4 x.\operatorname{sen} x.dx = \int \operatorname{sen}^2 x.\operatorname{sen}^2 x.\operatorname{sen} x.dx =$$

$$= \int (1-\cos^2 x)(1-\cos^2 x).\operatorname{sen} x.dx = \int (1-t^2)^2.(-dt) =$$

$$= -\int (1-2t^2+t^4).dt = -(t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5}) + C = -t + \frac{2t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C =$$

$$= -\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{cox^5 x}{5} + C$$

11.- Calcula por el método más adecuado la siguiente integral: $I=\int \frac{\cos x}{1-\cos x}.dx$

Solución:

$$I=\int \frac{\cos x}{1-\cos x}.dx=\int \frac{\cos x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}.dx=$$

$$=\int \frac{\cos x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}.dx=\int \frac{\cos x+\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}dx=$$

$$=\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}dx+\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}dx=\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}dx+\int \frac{1-\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}dx=$$

$$=\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}dx+\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}dx-\int dx=I_1-\operatorname{ctg}x+x+C$$

Resolvemos ahora la integral $I_1=\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}dx$ haciendo el cambio senx=t ; cosxdx=dt y entonces

$$I_1=\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}dx=\int \frac{dt}{t^2}=\int t^{-2}dt=\frac{t^{-1}}{-1}=-\frac{1}{t}=-\frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

12.-Resuelve la integral siguiente: $I=\int \frac{x-3}{x^2+49}dx$

Solución:

La descomponemos en dos integrales. En la primera podemos buscar en el numerador la derivada del denominador y en la segunda buscamos el arco tangente

$$I=\int \frac{x}{x^2+49}dx-\int \frac{3}{x^2+49}dx=I_1+I_2$$

$$I_1=\int \frac{x}{x^2+49}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+49}dx=L(x^2+49)$$

$$I_2=\int \frac{3}{x^2+49}dx=\int \frac{3/49}{x^2/49+49/49}dx=\frac{3}{49}\int \frac{1}{1+\left(x/7\right)^2}dx$$

Haciendo el cambio x/7=t resulta x=7t y por tanto dx=7dt por lo que

$$I_2=\frac{3}{49}\int \frac{1}{1+t^2}.7dt=\frac{21}{49}\int \frac{1}{1+t^2}dt=\frac{3}{7}\operatorname{arctg}t=\frac{3}{7}\operatorname{arctg}\frac{x}{7}$$

13.-Calcula por el método más adecuado la integral siguiente: $\int \frac{(Lx)^3}{x}dx$

Solución

El método más adecuado es el de sustitución o cambio de variable: $Lx=t$; $\frac{1}{x}$ dx = dt

$$\int \frac{(Lx)^3}{x}dx=\int (Lx)^3.\frac{1}{x}dx=\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{(Lx)^4}{4}+C$$

14.-Resuelva la integral $\int (x-1)e^x dx$

Solución:

Se resuelve por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = x-1 \\ dv = e^x dx \end{array}\right\} \begin{array}{l} du = dx \\ v = \int e^x dx = e^x \end{array}$$

$$\int (x-1)e^x dx = (x-1)e^x - \int e^x dx = (x-1)e^x - e^x + C$$

15.-Resuelve la siguiente integral por partes: $I = \int \cos^2 x dx$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} u = \cos x \\ dv = \cos x dx \end{array}\right\} \begin{array}{l} du = -\operatorname{sen} x dx \\ v = \int \cos x dx = \operatorname{sen} x \end{array}$$

$$I = \int \cos^2 x dx = \int \cos x \cos x dx = \operatorname{sen} x \cos x + \int \operatorname{sen}^2 x dx$$

$$I = \operatorname{sen} x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) dx$$

$$I = \operatorname{sen} x \cos x + \int dx - \int \cos^2 x dx$$

$$I = \operatorname{sen} x \cos x + x - I$$

$$2I = \operatorname{sen} x \cos x + x$$

$$I = \frac{\operatorname{sen} x \cos x + x}{2} + C$$

16.-Resuelve la siguiente integral por partes: $\int xL(1+x)dx$

Solución

$$\left.\begin{array}{l} u = L(1+x) \\ dv = xdx \end{array}\right\} \begin{array}{l} du = \dfrac{1}{1+x} dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}$$

$$I = \frac{x^2}{2} L|1+x| - \int \frac{x^2}{2} . \frac{1}{1+x} dx = \frac{x^2}{2} L(1+x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x} dx$$

Dividiendo $\mathbf{x^2}$ entre **x+1** se obtiene **x-1** de cociente y **1** de resto, por tanto,

$I = \frac{x^2}{2} L|1+x| - \frac{1}{2} \int (x - 1 + \frac{1}{x+1}) dx$. Finalmente se obtiene

$$I = \frac{x^2}{2} L|1+x| - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - x + L|x+1| \right) + C$$

17.-Resuelve la siguiente integral trigonométrica: $\int \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x}{\cos x} dx$

Solución:

$$I = \int \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x}{\cos x} = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx + \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx = I_1 + I_2$$

La primera la ponemos de forma que el numerador sea la derivada del denominador:

$$I_1 = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = -L|\cos x|$$

Para la segunda hacemos un cambio de variable:

$$I_2 = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx$$

cosx=t ; -senxdx=dt

$$I_2 = \int \frac{-dt}{t^2} = -\int t^{-2} dt = -\left(\frac{t^{-1}}{-1}\right) = \frac{1}{t} = \frac{1}{\cos x}$$

18.-Resuelve la siguiente integral: $\int \frac{8}{x^2 - 2x + 3} dx$

Solución:

Las raíces del denominador son imaginarias. En este caso se procede de la siguiente manera:

$x^2 - 2x + 3 = (x - \alpha)^2 + \beta$; es decir, $x^2 - 2x + 3 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta$

Identificando coeficientes se obtiene: α=1; β=2.

Entonces resulta: $\int \frac{8}{x^2 - 2x + 3} dx = \int \frac{8}{(x-1)^2 + 2} dx = \int \frac{8/2}{\frac{(x-1)^2}{2} + 1} dx = \int \frac{4}{\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dx$

Si hacemos el cambio $\frac{x-1}{\sqrt{2}} = t$ se obtiene que $dx = \sqrt{2} dt$ y llevandolo a la integral planteada,

$$\int \frac{8}{x^2 - 2x + 3} dx = \int \frac{4}{t^2 + 1} \sqrt{2} dt = 4\sqrt{2} \operatorname{arctg} t = 4\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C$$

19.-Resuelve la siguiente integral: $\int \frac{dx}{x(x-1)^2}$

Solución:

Estamos en el caso en que el denominador tiene raíces múltiples. Las descomposición tenemos que hacerla de la siguiente forma:

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

(Si la raiz múltiple fuese de orden 3, llegariamos con las fracciones hasta $\frac{D}{(x-1)^3}$)

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}$$ (donde hemos realizado la suma indicada)

Si los numeradores son iguales, los numeradores también lo serán, por tanto,

$1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$.

Para calcular los valores de A, B y C damos a x los valores de 0, 1 y otro valor cualquiera, por ejemplo, 2.

De ese modo obtenemos A=1, B=–1 y C=1.

Entonces:

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = L|x| - L|x-1| + \int (x-1)^{-2}\,dx =$$

$$= L|x| - L|x-1| + \frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} + C = L|x| - L|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

20.-Resuelve la siguiente integral: $I = \int \sqrt{25-x^2}\,dx$

Solución:

El cambio a realizar en este tipo de integrales es $x = 5\,\mathrm{sen}\,t$

$dx = 5\cos t.dt;\qquad \sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-(5\,\mathrm{sen}\,t)^2} = \sqrt{25(1-\mathrm{sen}^2\,t)} = 5\cos t$

Entonces: $I = \int 5\cos t.5\cos t.dt = 25\int \cos^2 tdt.$ (*)

Hacemos $I_1 = \int \cos^2 tdt$ y la resolvemos por partes:

$\cos t = u;\qquad \cos t.dt = dv\,;\qquad -\mathrm{sen}\,t.dt = du;\qquad v = \int \cos t.dt = \mathrm{sen}\,t$

$$I_1 = \mathrm{sen}\,t.\cos t + \int \mathrm{sen}^2\,t.dt = \mathrm{sen}\,t.\cos t + \int (1-\cos^2 t)dt = \mathrm{sen}\,t.\cos t + \int dt - \int \cos^2 t.dt$$

Es decir, $I_1 = set.\cos t + t - I_1$; y por tanto, $I_1 = \frac{\mathrm{sen}\,t.\cos t + t}{2}$

Resultado que llevado a (*) nos da $I = \frac{25}{2}(\mathrm{sen}\,t.\cos t + t)$. Si deshacemos el cambio de variable:

$\mathrm{sen}\,t = \frac{x}{5}$; y de la relación $\mathrm{sen}^2\,t + \cos^2 t = 1$, sale que $\cos t = \frac{\sqrt{25-x^2}}{5}$

Finalmente queda: $I = \frac{1}{2}x\sqrt{25-x^2} + \frac{25}{2}\mathrm{arcsen}\frac{x}{5} + C$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1.- Resolver la integral: $I = \int \frac{1}{\operatorname{sen} x} dx$

(Indicación: Multiplica y divide por senx) $Sol: -\frac{1}{2} L(\cos x + 1) + \frac{1}{2} L|\cos x - 1| + C$

2.- Resuelve $I = \int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x}$

(Indicación: multiplica y divide por el conjugado del denominador) $Sol: \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} + C$

3.- Halla el valor de la siguiente integral: $I = \int \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$

Sol. Buscando el arco seno resulta: $I = a.\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + C$

4.- Resuelve la integral siguiente: $I = \int \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x+2}} dx$

Sol: Se hace el cambio $x + 2 = t^{m.c.m(\acute{i}ndices)} = t^6$ y se obtiene

$I = 2\sqrt{x+2} - 3\sqrt[3]{x+2} + 6\sqrt[6]{x+2} - 6L\left|1 + \sqrt[6]{x+2}\right| + C$

5.- Resuelve: $I = \int \frac{1}{\sqrt{7 + 6x - x^2}} dx$

Sol: Eliminamos el término en x haciendo el cambio x=t–b/2 . Después buscamos el arco seno y se obtiene $I = \operatorname{arcsen}\frac{x-3}{4} + C$

6.- Demostrar que $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a}} dx = L\left|x + \sqrt{x^2 - a} + C\right|$

Sol: Hágase el cambio $\sqrt{x^2 - a} = t - x$

7.- Comprueba que $\int \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = 2L\left|x + \sqrt{x^2 + 4} + C\right|$

8.- Resuelve: $\int \frac{dx}{x^2 + 8x + 20}$ Sol. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+4}{2}$

9.- Utilizando el cambio de variable e^x = t, calcula $\int \frac{e^{2x} - 3e^x}{e^x + 1} dx$

Sol. $e^x - 4L(e^x + 1)$

10.- Calcula la siguiente integral: $I = \int \frac{1 + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} dx$

(Indicación: Sustituye el 1 por $sen^2 x + \cos^2 x$, después la descompones en suma de dos integrales y cada una de ellas se resuelve por cambio de variable)

Sol. $-2L(\cos x) + L(senx)$

11.- Resuelve: $I = \int \frac{1}{e^x + 1} dx$ Sol. $I = L(e^x) - L(e^x + 1) + C$

INTEGRAL DEFINIDA - CALCULO DE AREAS

Interpretación geométrica: $\int_a^b f(x)dx$ es el área de la región limitada por las rectas x = a, x = b, y = 0 (eje de abscisa) y la gráfica de la función.

Teorema del valor medio: $\int_a^b f(x)dx$ = f(c)·(b - a) - Regla de Barrow (integral definida): $\int_a^b f(x)dx$ = F(b) - F(a)

0.-*Calcular la integral* $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx$

Solución:

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$x = A(x+1)+B(x-1)$$

$$\text{Para x = -1, } B = \frac{1}{2} \quad ; \quad \text{Para x = 1, A} = \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{x}{x^2-1}dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1}dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x+1}dx = \frac{1}{2}L|x-1| + \frac{1}{2}L|x+1| =$$

$$= L(\sqrt{x-1}.\sqrt{x+1})$$

Por tanto,

$$\int \frac{x}{x^2-1}dx = \left[L(\sqrt{x-1}\sqrt{x+1})\right]_2^3 = L\sqrt{8} - L\sqrt{3}$$

1.- *Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función* **y = x^3 - 3x² - x + 3,** *las rectas* **x = -2, x = 2 y** *el eje OX*

1º- Resolver la ecuación: y = x^3 - 3x² - x + 3 = 0 (para calcular las abscisa de los puntos de corte de la gráfica de f con el eje OX); x_1 = -1, x_2 = 1 y x_3 = 3, este último fuera del intervalo [-2, 2] , con lo que no se tiene en cuenta.

2º- Calcular la suma de los valores absolutos de las integrales definidas:

$$\left|\int_{-2}^{-1}(x^3 - 3x^2 - x + 3)dx\right| + \left|\int_{-1}^{1}(x^3 - 3x^2 - x + 3)dx\right| + \left|\int_{1}^{2}(x^3 - 3x^2 - x + 3)dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-2}^{-1}\right|$$

+

$$+ \left|\left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{1}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{1}^{2}\right| = \left|-\frac{25}{4}\right| + |4| + \left|-\frac{7}{4}\right| = 12u^2.$$

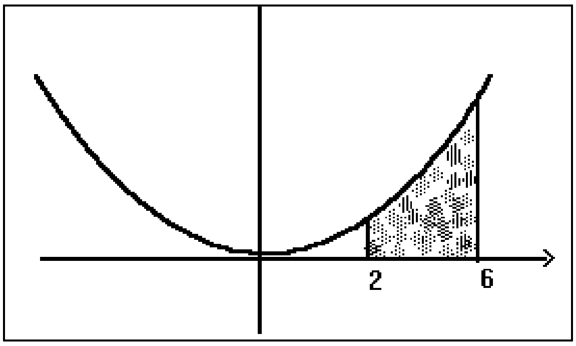
***2.-Calcula el área del recinto limitado por la parábola y=x²* y las rectas y=0, x=2, x=6.**

Solución:

La recta **y=0** es el eje **x.**

El área del recinto limitado por una función **f(x),** el eje **x** y la rectas **x=a, x=b,** viene dada por el valor absoluto de la integral $I = \int_a^b f(x)dx$

siempre que la función **f(x)** no corte al eje **x** en ningún punto interior del intervalo [a,b]



$$I = \int_2^6 x^2 dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^6 = \frac{6^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{208}{3}$$

$$\text{Area}= \left|\frac{208}{3}\right| = \frac{208}{3}\ \text{u}^2$$

3.- Calcula el área limitada por la curva y = x³ – 6x² + 8x y el eje x

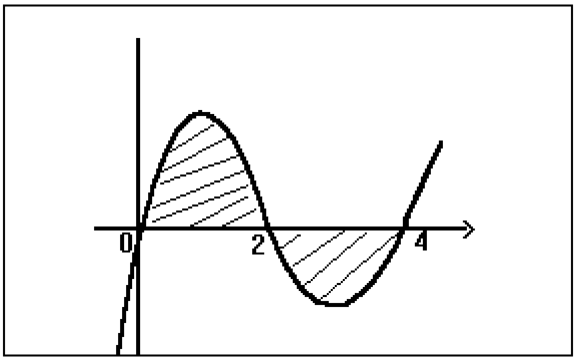
Solución:

Calculamos los puntos de corte de la curva con el eje **x :**

$$x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

$$(x^2 - 6x + 8)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2; x = 4 \end{cases}$$

Los puntos de corte obtenidos son **0**, **2** y **4** , por tanto el área pedida se halla resolviendo las integrales:



$$\text{I}_1= \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx$$

$$\text{I}_2= \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx$$

$$\text{I}_1= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 = 4\,;$$

$$\text{I}_2= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_2^4 = -4\,;$$

Area= |4 |+ |-4 | = **8 u²**

4.-Calcula el área del recinto limitado por la parábola de ecuación y = 9 –x² y el eje de abscisas.

Solución

Determinamos los puntos de corte de la curva con el eje **x:**

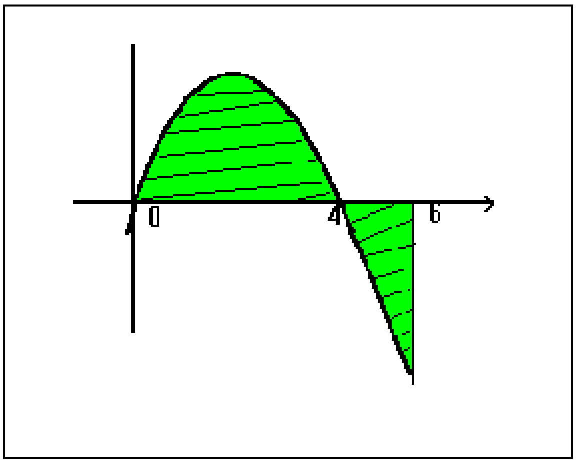
9-x²=0 x=3; x=-3

$$I = \int_{-3}^3 (9 - x^2)dx = \left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^3 = (27-9) - (-27+9) = 36$$

; Area= |36 | u² = **36 u²**

5.-Calcula el área del recinto limitado por la parábola $y=4x-x^2$ y el eje de abscisas en el intervalo [0,6]

Solución:



Comprobamos si hay puntos de corte dentro del intervalo [0,6].

$4x-x^2=0 \Rightarrow x(4-x)=0 \Rightarrow x=0;\ x=4$

Como hay un punto de corte dentro del intervalo [0,6] que es x = 4, las integrales a plantear son:

$$I_1=\int_0^4 (4x-x^2)dx=\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^4$$

$$I_1=32-\frac{64}{3}=\frac{96-64}{3}=\frac{32}{3}$$

$$I_2=\int_4^6 (4x-x^2)dx;\qquad I_2=\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_4^6=(64-72)-\frac{32}{3}=-\frac{56}{3}$$

$$\text{Area}=\left|\frac{32}{3}\right|+\left|-\frac{56}{3}\right|=\frac{88}{3};\quad \text{Area}=\frac{88}{3}u^2$$

6.- Halla el área comprendida entre las parábolas $y = 8 - x^2$; $y = x^2$

Solución:

Buscamos los puntos de corte de las dos curvas:

$$8-x^2=x^2 \Rightarrow 2x^2=8 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$

Los límites de integración son -2 y 2

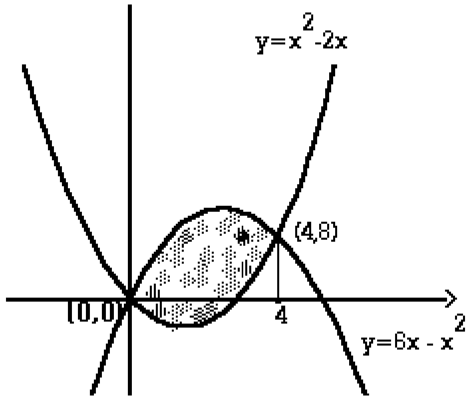
La función a integrar es la diferencia de las dos funciones. $8-x^2-x^2=8-2x^2$,

por tanto, $$I=\int_{-2}^{2}(8-2x^2)dx=\left[8x-\frac{2x^3}{3}\right]_{-2}^{2}$$

$$I=(16-\frac{16}{3})-(-16-\frac{-16}{3})=32-\frac{32}{3}=\frac{64}{3}\quad;\quad Area=\left|\frac{64}{3}\right|u^2=\frac{64}{3}u^2$$

7.-Halla el área comprendida entre las curvas $y=6x-x^2$; $y=x^2-2x$

Solución:



$$6x-x^2=x^2-2x \Rightarrow 2x^2-8x=0$$

$$2x(x-4)=0 \Rightarrow x=0;\quad x=4$$

Función a integrar:

$$(x^2-2x)-(6x-x^2)=2x^2-8x$$

$$I=\int_0^4 (2x^2-8x)dx=\left[\frac{2x^3}{3}-4x^2\right]_0^4=$$

$$=\frac{128-192}{3}=-\frac{64}{3}\quad \text{Area}=\left|-\frac{64}{3}\right| = \frac{64}{3}\ \text{u}^2$$

8.-Area del recinto limitado por la parábola y=3x-x² y la recta y=x-3

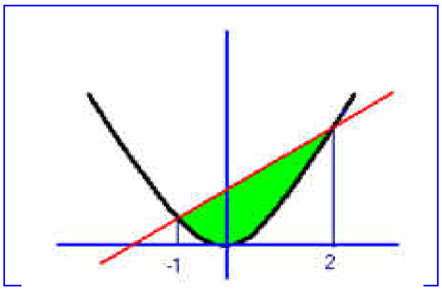
Solución:

Límites de integración: $3x-x^2=x-3 \Rightarrow x^2-2x-3=0$

Resolviendo la ecuación se obtiene x=3; x=-1

Función a integrar: $I=\int_{-1}^{3}(x^2-2x-3)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right]_{-1}^{3}=-\frac{32}{3}$; Area=$\left|-\frac{32}{3}\right|=\frac{32}{3}u^2$

9.-Halla el área del recinto limitado por la parábola de ecuación y=x² , la recta de ecuación y=x+2 y el eje OX.



Límites de integración:

Son los puntos de corte de la parábola y la recta: $x^2=x+2 \Rightarrow x^2-x-2=0$

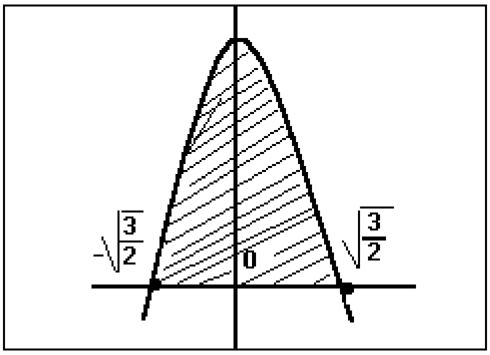
$$x=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}2\\-1\end{cases}$$

Función a integrar: $x+2-x^2$ (Diferencia de las dos funciones)

resolver la integral: $I=\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$; $Area=\left|\frac{9}{2}\right|u^2=\frac{9}{2}u^2$

10.-Calcula el área del recinto limitado por la parábola de ecuación y=2(1-x²) y la recta de ecuación y = 0

Solución:



Como la curva es simétrica respecto al eje de ordenadas, podemos integrar entre 0 y $\sqrt{\frac{3}{2}}$

y multiplicar el resultado por 2.

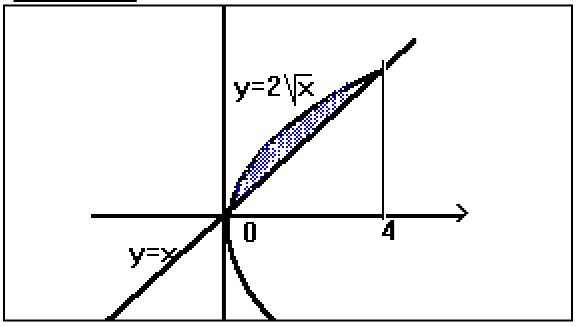
Límites de integración: $2(1-x^2)=-1 \Rightarrow 3=2x^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

Función a integrar: $2(1-x^2)-(-1)=3-2x^2$

$$I=\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}}(3-2x^2)dx=\left[3x-\frac{2x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}}=2\sqrt{\frac{3}{2}} \quad\rightarrow\quad Area=4\sqrt{\frac{3}{2}}u^2$$

11.-Calcula el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = 2\sqrt{x}$ y la recta y = x.

Solución:



Límites de integración:

$$2\sqrt{x} = x \Rightarrow 4x = x^2 \Rightarrow x^2 - 4x = 0$$

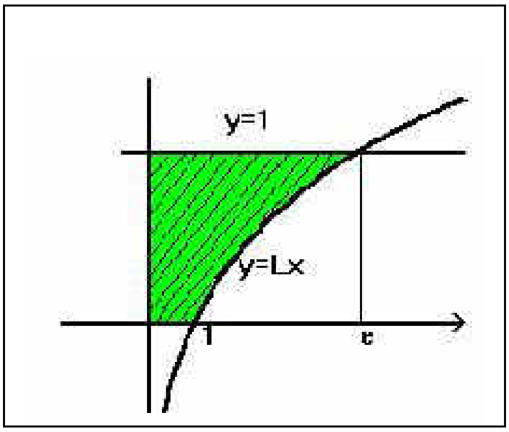
$$x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0;\ \ x = 4$$

Función a integrar: $2\sqrt{x} - x$

$$I = \int_0^4 (2\sqrt{x} - x)dx = \int_0^4 (2x^{\frac{1}{2}} - x)dx = \left[\frac{4\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{8}{3}\ ; \quad \text{Area}=\frac{8}{3}u^2$$

12.-Halla el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones y=Lx, y=1 y los ejes de coordenadas.

Solución:



Observando el dibujo, el área pedida será la diferencia entre las integrales

$$\int_0^e 1.dx \quad \text{y} \quad \int_1^e Lx.dx$$

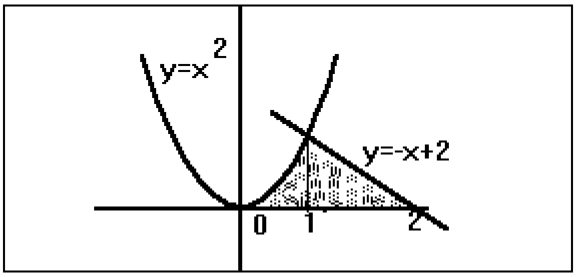
$$I_1 = \int_0^e 1.dx = [x]_0^e = e$$

$$I_2 = \int_1^e Lxdx = [xLx - x]_1^e = (e-e)-(0-1) = 1$$

(por partes) Area=$I_1 - I_2 = e - 1$ u^2

13.- Halla el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2$, la recta de ecuación $y = -x + 2$ y el eje OX

Solución:



Punto de corte de la parábola y el eje OX:

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

Punto de corte de la recta y el eje =OX:

$-x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Punto de corte de la parábola y la recta:

$$x^2 = -x + 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \ \rightarrow \ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

La solución x = -2 está fuera del eje OX, por tanto, sólo hemos de considerar el valor x =1

Observando el dibujo, hemos de resolver las integrales siguientes:

$$I_1 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}; \qquad I_2 = \int_1^2 (-x+2)dx = \frac{1}{2}; \qquad Area = \left|\frac{1}{3}\right| + \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{5}{6}u^2$$

CÁLCULO DEL VOLUMEN DE UN CUERPO

Que se genera al girar la gráfica de la función y = f(x) entre los puntos de abscisas a y b alrededor de un eje:

Alrededor del eje de abscisas: $\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.}$

Para calcular el volumen del cuerpo que se genera al girar la gráfica de la función $y = x\sqrt{x+1}$, entre los puntos de corte con el eje OX, alrededor de este eje, calculamos la integral definida:

$V = \pi \int_{-1}^{0} \left(x\sqrt{1+x}\right)^2 dx$ (x = -1 y x = 0 son las soluciones de la ecuación $x\sqrt{x+1} = 0$, abscisas de los puntos de corte de la gráfica de f con el eje OX).

$$V = \pi \int_{-1}^{0} \left(x\sqrt{1+x}\right)^2 dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} = \left[0 - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\right] = \frac{\pi}{12} u^3.$$

Alrededor del eje de ordenadas: $\boxed{V = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot x \cdot dx.}$

f-3-2-1) Ejemplo: para calcular el volumen del cuerpo que se genera al girar la gráfica de la función y = $x \sqrt{x+1}$, entre los puntos de corte con el eje OX, alrededor del eje de ordenadas, calculamos la integral definida:

$$V = 2\pi \int_{-1}^{0} x\left(x\sqrt{1+x}\right)dx = 2\pi \int_{-1}^{0} x^2\sqrt{1+x}\,dx.$$

Aplicando el cambio de variable $1 + x = t^2$, se tiene: $x = t^2 - 1$, $dx = 2tdt$; y los límites de integración:

si x = -1, t = 0 y

si x = 0, t = 1.

$$V = 2\pi \int_0^1 (t^2 - 1)^2 \cdot t \cdot 2tdt = 2\pi \int_0^1 \left(2t^6 - 4t^4 + 2t^2\right)dt = 2\pi \left[\frac{2t^7}{7} - \frac{4t^5}{5} + \frac{2t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{32}{105}\pi\, u^3.$$