Matrius:

Suma de Matrius:

Determina els elements que falten si A + B = C. $A=\begin{pmatrix}3&4&5\\5&a&b\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&c&d\\e&3&-1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}f&7&6\\1&-1&0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}3&4&5\\5&a&b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&c&d\\e&3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f&7&6\\1&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}5&4+c&5+d\\5+e&a+3&b-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f&7&6\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

$f=5$ $\quad 4+c=7\to c=3$ $\quad 5+d=6\to d=1$

$5+e=1\to e=-4$ $\quad a+3=-1\to a=-4$ $\quad b-1=0\to b=1$

Producte de matrius:

$$A=\begin{pmatrix}1&3\\2&2\\1&1\end{pmatrix}\text{ i }B=\begin{pmatrix}4&3\\2&2\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot B=\begin{pmatrix}1\cdot4+3\cdot2&1\cdot3+3\cdot2\\2\cdot4+2\cdot2&2\cdot3+2\cdot2\\1\cdot4+1\cdot2&1\cdot3+1\cdot2\end{pmatrix}\text{ és a dir }A\cdot B=\begin{pmatrix}10&9\\12&10\\6&5\end{pmatrix}$$

Transposada: Calcula $(A\cdot B)^t$, si A i B són les matrius següents:

$$A=\begin{pmatrix}1&7\\0&3\\5&-4\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-4&1\\5&8\end{pmatrix}\quad\left[\begin{pmatrix}1&7\\0&3\\5&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4&1\\5&8\end{pmatrix}\right]^t=\begin{pmatrix}-4&1\\5&8\end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix}1&7\\0&3\\5&-4\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}-4&5\\1&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&5\\7&3&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31&15&-40\\57&24&-27\end{pmatrix}$$

Antisimètrica: Completa la matriu següent perquè sigui antisimètrica:

$$\begin{pmatrix}a&1&b\\c&0&-3\\2&d&e\end{pmatrix}\quad\text{Sol}\begin{pmatrix}a&1&b\\c&0&-3\\2&d&e\end{pmatrix}$$ és antisimètrica si: $a=0, b=-2, c=-1, d=3, e=0.$

Rang de la matriu: calcula el rang per mitjà del mètode de Gauss

$$\begin{pmatrix}3&2&7\\0&-1&2\\-5&3&0\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3=F_3+\frac{5}{3}F_1]{}\begin{pmatrix}3&2&7\\0&-1&2\\0&\frac{19}{3}&\frac{35}{3}\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3=F_3+\frac{19}{3}F_2]{}\begin{pmatrix}3&2&7\\0&-1&2\\0&0&\frac{73}{3}\end{pmatrix}\text{ rang}=3$$

$$\begin{pmatrix}1&-3&5&7\\8&-3&-2&14\\2&1&-4&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{F_2=F_2-8F_1\\F_3=F_3-2F_1}]{}\begin{pmatrix}1&-3&5&7\\0&21&-42&-42\\0&7&-14&-14\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3=F_3-\frac{1}{3}F_2]{}\begin{pmatrix}1&-3&5&7\\0&21&-42&-42\\0&0&0&0\end{pmatrix}\text{ rang}=2$$

Matriu inversa:

a) Matriu inversa mitjançant la definició:

$$\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\to\left.\begin{matrix}3a-5c=1\\3b-5d=0\\-a+2c=0\\-b+2d=1\end{matrix}\right\}\to\begin{cases}a=2\\b=5\\c=1\\d=3\end{cases}\text{ matriu inversa: }\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}$$

b) Matriu inversa pel mètode de Gauss:

$$\begin{pmatrix}-3&7\\2&-5\end{pmatrix}\quad\left(\begin{array}{cc|cc}-3&7&1&0\\2&-5&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2=F_2+\frac{2}{3}F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}-3&7&1&0\\0&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1=F_1+21F_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}-3&0&15&21\\0&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_1=-\frac{1}{3}F_1\\F_2=-3F_2}]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-5&-7\\0&1&-2&-3\end{array}\right)$$

c) Matriu inversa pel mètode dels determinats:

$$A=\begin{pmatrix}4&3\\2&2\end{pmatrix}\Rightarrow\det A=\begin{vmatrix}4&3\\2&2\end{vmatrix}=4\cdot2-2\cdot3=2\Rightarrow\text{trasposta }A^t=\begin{pmatrix}4&2\\3&2\end{pmatrix}\text{ adjunts }A^{t\,\prime}=\begin{pmatrix}2&-3\\-2&4\end{pmatrix}\quad A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-3\\-2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{2}\\-1&2\end{pmatrix}$$

Potencia de Matrius:

Determina el valor de A^n, per a cada n i troba $A^{350} - A^{250}$.

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}\qquad A^2=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\6&1\end{pmatrix}\qquad A^3=\begin{pmatrix}1&0\\6&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\9&1\end{pmatrix}$$

$$\text{En general: } A^n=\begin{pmatrix}1&0\\3n&1\end{pmatrix}\rightarrow A^{350}-A^{250}=\begin{pmatrix}1&0\\1.050&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\750&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\300&0\end{pmatrix}$$

Sistemes

<u>Mètode de reducció per files, mètode de Gauss:</u>

1.- <u>Escalonar</u> inferiorment per files la matriu ampliada A'.

2.- Es poden <u>canviar l'ordre</u> de les columnes (excepte l'última) anotant el canvi d'ordre en les incògnites

3.- Qualsevol fila nul·la es pot <u>suprimir</u>, simplificant així la matriu.

4.- Si ens trobem amb una fila que té tots els elements nuls excepte l'últim, el sistema és <u>incompatible</u>.

<u>Tipus sistema:</u>
Teorema de Rouché-Frobenius

- Compatible R(A) = R (A')
  - R(A) = R (A') = Nº Inc ➡ Sistema Compatible Determinat (SCD)
  - R(A) = R (A') < Nº Inc ➡ Sistema Compatible Indeterminat (SCI)
- Incompatible R(A) ≠ R (A') ➡ Sistema Incompatible (SI)

<u>Exemple</u> : Resoleu el següent sistema de 3 equacions amb 3 incògnites pel mètode de *<u>Gauss-Jordan</u>*.

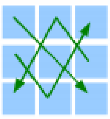
$$\begin{cases}x+y+z=6\\x-y-z=-4\\x+y-z=0\end{cases}\Rightarrow A'=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\1&-1&-1&-4\\1&1&-1&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\0&-2&-2&-10\\0&0&-2&-6\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right)\quad\begin{array}{l}z=3\\y=2\\x=1\end{array}$$

Determinats

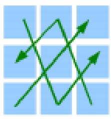
1. Si multipliquem una columna per un nombre, el determinant queda multiplicat per aquest nombre
2. Un determinant que contingui dues columnes iguals o una columna de zeros, val zero.
3. El valor del determinant no varia si bescanviem les files per les columnes conservant l'ordre.

<u>a) Regla de Sarrus:</u>

\+



\-



b) Menor complementari:

$$\begin{bmatrix}1&5&1\\3&0&4\\-2&3&2\end{bmatrix}=1\cdot\begin{bmatrix}0&4\\3&2\end{bmatrix}-3\cdot\begin{bmatrix}5&1\\3&2\end{bmatrix}+(-2)\cdot\begin{bmatrix}5&1\\0&4\end{bmatrix}=-73$$

<u>Mètode de Cramer:</u> Determinants que resulten en substituir la columna de cada incògnita per la columna de terme independent, dividits per el determinant de la matriu A.

Exemple:

$$\begin{cases}x+y+z=6\\x-y-z=-4\\x+y-z=0\end{cases}\Rightarrow \det A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\1&1&-1\end{bmatrix}=4\Rightarrow \det x=\begin{bmatrix}6&1&1\\-4&-1&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}=4\quad \det y=\begin{bmatrix}1&6&1\\1&-4&-1\\1&0&-1\end{bmatrix}=8\quad \det z=\begin{bmatrix}1&1&6\\1&-1&-4\\0&1&0\end{bmatrix}=12$$

$$x=\frac{\det x}{\det A}=\frac{4}{4}=1\ ,\qquad y=\frac{\det y}{\det A}=\frac{8}{4}=2\ ,\qquad z=\frac{\det z}{\det A}=\frac{12}{4}=3$$

PAU - Secció Matrius , sistemes i problemes

PAU - Social 2016S – 3. a) La matriu ampliada d'un sistema de tres equacions amb tres incognites es A →

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Fustifiqueu, sense resoldre'l, si el sistema es incompatible, compatible indeterminat, o determinat.

b) Considereu ara la matriu d'un altre sistema de tres equacions amb tres incògnites B: →

Justifiqueu si es incompatible o compatible i, en aquest darrer cas, resoleu-lo.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

sol: a) R 3 perque es triangular: SCD

b) R 2: Indeterminat : x= 2-z; y= 2z-1; z=z

PAU – Social 2014J. 4. Siguin les matrius A i I, determineu x per tal que es verifiqui l'equació: A^2–6A+5I=0, on 0 és la matriu en què tots els elements són 0.

$$A=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \text{ i } I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}-6\cdot\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} x^2-6x+5 & 0 \\ 0 & x^2-6x+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x = 1,
x = 5.

PAU – Social 2014J. 3b. Siguin les matrius. A, B, I
a) Determineu una matriu X que verifiqui A·X=I
b) Determineu una matriu Y que verifiqui A·Y·A=B

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. b. $A\cdot Y\cdot A=B\rightarrow Y=A^{-1}\cdot B\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 8 & -13 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$

PAU - Social 2015 – 4. Siguin les matrius A y B:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -a \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b & c \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculeu les matrius A + B i A · B

b) Determineu els valors de a, bi c que fan A + B = A · B

a. $A+B=\begin{pmatrix} 1+b & a+c \\ 3 & 1-a \end{pmatrix}$ $A\cdot B=\begin{pmatrix} b+a & c+a \\ 2b-a & 2c-a \end{pmatrix}$ b. A + B = A · B -> $\left.\begin{array}{c} 1+b=b+a \\ a+c=c+a \\ 3=2b-a \\ 1-a=2c-a \end{array}\right\}$ -> $a=1, b=2, c=\frac{1}{2}$

PAU - Social 2015S – 4. Trobeu les matrius A i B sabent $A-2B=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ i $2A+3B=\begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$ que:

Sol: es un $2A-4B=\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$ -> $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ sistema:

PAU - Social 2013. 2 Siguin les matrius Ai B.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & a \\ -2 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ b & -1 \end{pmatrix}$$

a) Determineu el valor dels paràmetres a i b que fa que A · B = B · A

b) Determineu el valor de a per al qual es verifica A^2 = 2A

a. $A\cdot B=\begin{pmatrix} 6+ab & -a \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix} 6 & 3a \\ 2b+2 & ab \end{pmatrix}$, que implica a = 0, b = - 4.

b. $A^2=\begin{pmatrix} 2 & a \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & a \\ -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4-2a & 2a \\ -4 & -2a \end{pmatrix}$. $2A=\begin{pmatrix} 4 & 2a \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$. iguals quan a = 0

PAU 2017. Considereu les matrius A, B i C, on m i n són dos nombresrea $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m & n \end{pmatrix}$

a) Comproveu que es compleixla igualtat: $(A - B) \cdot (A + B) = A^2 - B^2$.

b) Determineu i per tal que les matrius i commutin, és a dir: B · C = C · D

Sol: a) $(A - B) \cdot (A + B) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 10 \\ 10 & 25 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 26 & 10 \\ 10 & 26 \end{pmatrix}$ i $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B \cdot C = \begin{pmatrix} m & n \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $C \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ n & m \end{pmatrix}$ $m = -1$ i $n = 1$.

PAU 2017. 6.Considereu les matrius A y B. $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a. Calculeu el valor del paràmetre *a* per al qual es compleix que A·B=B·A

b. Per al valor a=2 , trobeu una matriu X, tal que AXA = B.

a) $A{\cdot}B = \begin{pmatrix} 2a & -a+1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ i $B{\cdot}A = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $a = 1$. b) Aïllant $X = A^{-1}{\cdot}B{\cdot}A^{-1}$, $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $X = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

PAU - Social 2016 – 6b. a) Calculeu les matrius A·B i B·A

b) Justifiqueu si en algun cas és possible calcular P^2 quan P és una matriu no quadrada.

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 8 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

b) el nombre de columnes de la primera matriu, P, no coincidirà amb el nombre de files de la segona, que és la mateixa.

Per tant, mai no es pot calcular el quadrat d'una matriu no quadrada

PAU - Social 2015 – 4B. Donades les matrius A i B: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Calculeu la matriu X que compleix: $X \cdot A + B^2 = 2 \cdot I_2$, on $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On I_2 és la matriu identitat d'ordre 2.

Sol:

$X = (2 \cdot I_2 - B^2) \cdot A^{-1}$ -> $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ -> $X = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -\frac{7}{2} \\ 4 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

PAU Social 2012 S. 6. Donades les matrius A, B i C : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a.Trobeu una matriu X tal que A·B + X = C.

b.Calculeu C^3.

Sol:

a. $X = C - A{\cdot}B \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ b. $C^3 = C^2 \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

PAU Social 2012. 3. Considerem les matrius A i B:

a. Justifiqueu si Ès possible efectuar A· B o B· A. En cas afirmatiu, calculeu-ho.

b. Calculeu B2 i B3.

Sol:

a. A·B No és possible nombre de columnes diferent $B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ -5 & 0 & 20\end{pmatrix}$

b. $B^2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -6\\ 0 & 25\end{pmatrix},\ B^3=B^2\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -6\\ 0 & 25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -31\\ 0 & 125\end{pmatrix}$

Cientific

2015. 5.- Sigui A una matriu quadrada que compleix que $\boldsymbol{A^3=I}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat.

a) Demostreu que la matriu A té inversa i que $\boldsymbol{A^{-1}=A^2}$

b) En el cas de $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, calculeu si hi ha cap valor del paràmetre a per al qual $\boldsymbol{A^3=I}$

a) $A\cdot A^2=A^2\cdot A=I$, $\boxed{\text{per tant } A \text{ té inversa i } A^{-1}=A^2}$.

b) $A^2=\begin{pmatrix}1-a & -a\\ 1 & 4-a\end{pmatrix}$ i $A^3=\begin{pmatrix}1 & 3a-a^2\\ a-3 & 3a-8\end{pmatrix}$ $\left.\begin{array}{rcl}1 & = & 1\\ 3a-a^2 & = & 0\\ a-3 & = & 0\\ 3a-8 & = & 1\end{array}\right\}$ $a=3$ $\boxed{\text{Així per a } a=3,\ A^3=Id}$.

Convocatòria 2015 – Serie2 - Cientif Considereu el sistema d'equacions line

$$\left.\begin{array}{rcl}-3x+2y+3z & = & 0\\ (a-2)y-3z & = & 0\\ -x-y+(-a-3)z & = & 0\end{array}\right\}.$$

a) Calculeu per a quins valors del paràmetre a el sistema té més d'una solució

b) Resoleu el sistema per al cas a=-3

a) $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 3\\ 0 & a-2 & -3\\ -1 & -1 & -a-3\end{pmatrix}$ ⇨ $|A|=\begin{vmatrix}-3 & 2 & 3\\ 0 & a-2 & -3\\ -1 & -1 & -a-3\end{vmatrix}=3(a-2)(a+3)+6+3(a-2)+9=3(a^2+2a-3).=0$ ⇨ $a=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\boxed{a=1},\ \boxed{a=-3}$. El problema també es pot resoldre triangulant per Gauss la matriu A

b) $\left.\begin{array}{rcl}-3x+2y+3z & = & 0\\ -5y-3z & = & 0\\ -x-y & = & 0\end{array}\right\}$ *rang(A)=2* ⇨ $x=-y$ i $z=\frac{-5y}{3}$. ⇨ $\boxed{\left(-y,\ y,\frac{-5y}{3}\right)}$

a) Calculeu la matriu de la forma $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ que satisfà $A^2–A=I$, en què I és la matriu identitat, $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

b) Calculeu A^{-1} i comproveu que el resultat es correspon amb el que obteniu de deduir la matriu A^{-1} a partir de la igualtat $A^2–A=I$.

a) $\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ⇨ $\begin{pmatrix}1+a & a\\ 1 & a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ⇨ $\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ⇨ $a=1$ ⇨ $\boxed{A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}$.

b) $\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}}$ ⇨ $A\cdot(A-I)=I=(A-I)\cdot A.$ ⇨ $\boxed{A^{-1}=A-I=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}}$

2015. 1.- Considereu el sistema d'equacions en què *m* és un paràm

$$\left.\begin{array}{rcl}x-2y-z & = & 0\\ -mx+3y+z & = & 0\\ x+y & = & 4\end{array}\right\}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre *m*

b) Resoleu el sistema per a *m* = 1.

a) $\boxed{\text{Si } m\neq 0}$ $\text{rang}(A)=3$ i per tant $\text{rang}(A')=3$ **SCD** $\boxed{\text{Si } m=0,}$ $\text{rang}(A)=2$, ja que $\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{vmatrix}=3\neq 0$, però rang $(A/b)=3$, **S. Incomp.**

b) $x=\dfrac{\begin{vmatrix}0 & -2 & -1\\ 0 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 0\end{vmatrix}}{1}=\dfrac{4}{1}=4,\quad y=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 4 & 4 & 0\end{vmatrix}}{m}=\dfrac{0}{1}=0,\quad z=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ 4 & 1 & 4\end{vmatrix}}{1}=\dfrac{4}{1}=4$ ⇨ $x=4, y=0$ i $z=4$.

2015. 5.- Sigui A una matriu quadrada que compleix que $A^3 = I$, en què I és la matriu identitat.

a) Demostreu que la matriu A té inversa i que $A^{-1} = A^2$

b) En el cas de $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, calculeu si hi ha cap valor del paràmetre a per al qual $A^3 = I$

a) $A \cdot A^2 = A^2 \cdot A = I$, $\boxed{\text{per tant } A \text{ té inversa i } A^{-1} = A^2}$.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1-a & -a \\ 1 & 4-a \end{pmatrix}$ i $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3a-a^2 \\ a-3 & 3a-8 \end{pmatrix}$ $\left.\begin{matrix} 1 & = & 1 \\ 3a-a^2 & = & 0 \\ a-3 & = & 0 \\ 3a-8 & = & 1 \end{matrix}\right\} a = 3$. $\boxed{\text{Així per a } a = 3, \ A^3 = Id}$.

Juny 2014.- 1 Considereu la matriu M. →

a) Calculeu el rang de la matriu M en funció dels valors del paràmetre a.

b)Discutiu i resoleu el sistema d'equacions lineals.

Sol: $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a+1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Sempre 3 b) Per Gauss o Cramer: x=1 ; y=0 ; z=0

Juny 2014.- 6. Responeu a les qüestions següents:

a)Demostreu que si A és una matriu quadrada que satisfà la igualtat A2=I, on Iés la matriu identitat, aleshores A és invertible i A–1 satisfà (A–1)2=I.

b)Calculeu l'expressió general de les matrius de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix}$ amb $b \neq 0$ que satisfan la igualtat A^2=I.

Sol: R: A·A = I ; A^{-1} = A ; $A = \begin{pmatrix} -2 & b \\ -3/b & 2 \end{pmatrix}$

Juny 2014.- 2b. Responeu a les qüestions següents:

$$\begin{cases} (k-1)y + (k^2-1)z = 0 \\ (4k+1)x - y - 7z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema d'equacions lineals en funció dels valors de k.

b) Resoleu el sistema per a k=1

Sol: a) R= Si k≠1 i k≠-3/2 R=3: SCD; si k=1 R=3 SCI 1 grau llibertat ; si k=-3/2 SI

b) (1/6 + z , -1/6 -2·z , z)

2016: 1. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre real *k*.

Resoleu el sistema per al cas *k* = 0.

Sol:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 4k-7 \\ 2 & -k & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & k+1 \end{array}\right)}_{A'} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & -k & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8k.$$

K≠0: rang (A)=3, rang(A') =3 = nombre d'incògnites.

Per tant, el sistema és Compatible Determinat.

K=0: det(A) = 0, rang(A) <3, però el menor *det* ≠0

ens diu que rang(A)=2 → Sistema Compatible Indet. amb 1 grau de llibertat: n- rang(A) = (3-2) = 1

Para k=0: $\left.\begin{matrix} 2x+4y & = & -7-4z \\ 2x & = & -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$ substituïnt $-1+4y = -7-4z \quad y = -\frac{6+4z}{4} = -\frac{3+2z}{2}$ $\boxed{\left(\frac{-1}{2}, \frac{-3-2z}{2}, z\right)}$

1. Considereu les matrius M de la forma $M = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ en què a és un nombre real.
   a. Determineu a de manera que $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix}$. *[1 punt]*
   b. Determineu a de manera que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, en què M^{-1} representa la matriu inversa de M. És a dir, $M \cdot M^{-1} = I$, en què I és la matriu identitat d'ordre 2. *[1 punt]*

a) Comencem calculant M^2: $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a^2 & 2a \\ -2a & -a^2 \end{pmatrix}$.
Sabem que $\begin{pmatrix} 4-a^2 & 2a \\ -2a & -a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix}$. Obtenim, per tant, que cal que es compleixi que $4 - a^2 = 3$ i que $-a^2 = -1$. En ambdós casos tenim que $a^2 = 1$, que té per solucions $a = 1$ i $a = -1$.

b) Sabem que $M \cdot M^{-1} = I$. Però com que sabem la forma que ha de tenir M^{-1}, tenim que $M \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 2+2a \\ 0 & -a \end{pmatrix}$. I imposant que aquesta darrera matriu ha de ser igual a la matriu identitat, tenim que $-a = 1$, és a dir, que $a = -1$, i que $2 + 2a = 0$, que també es compleix quan $a = -1$. Per tant, l'única solució és $a = -1$.
Alternativament es pot calcular la matriu inversa M^{-1} i igualar a la forma que ha de tenir segons l'enunciat del problema.

3. Un inversor ha obtingut un benefici de 1.500 € després d'invertir un total de 40.000 € en tres empreses diferents. Aquests beneficis es desglossen de la manera següent: la quantitat invertida en l'empresa A li ha reportat un 2 % de beneficis, la quantitat invertida en l'empresa B, un 5 %, i la quantitat invertida en l'empresa C, un 7 %. Els diners invertits en l'empresa B han estat els mateixos que en les altres dues empreses juntes. Quina va ser la quantitat invertida en cada una de les tres empreses?
[2 punts]

Anomenem x la quantitat invertida en l'empresa A, y la quantitat invertida en l'empresa B i z la quantitat invertida en l'empresa C. A partir de les condicions de l'enunciat, obtenim el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y + z = 40.000 \\ x + z = y \\ 0{,}02x + 0{,}05y + 0{,}07z = 1.500 \end{cases}$$

Que és equivalent al sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 40.000 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + 5y + 7z = 150.000 \end{cases}$$

El resolem mitjançant el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 40.000 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 150.000 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 40.000 \\ 0 & -2 & 0 & -40.000 \\ 0 & 3 & 5 & 70.000 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 40.000 \\ 0 & 1 & 0 & 20.000 \\ 0 & 0 & 5 & 10.000 \end{array}\right).$$

5. Resoleu les preguntes següents:

a*)** Trobeu les matrius ***A i ***B*** que compleixen que $A-2B=\begin{pmatrix}1 & 13\\ 0 & -5\end{pmatrix}$ i $2A+3B=\begin{pmatrix}2 & -9\\ 7 & 4\end{pmatrix}$.

[1 punt]

***b*)** Determineu el valor de a, b, c i d perquè es verifiqui que $\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & c\\ 2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b & -5\\ d & -7\end{pmatrix}$.

[1 punt]

a) Observem que $2(A-2B)-(2A+3B)=-7B$. Per tant,

$$-7B=2\begin{pmatrix}1 & 13\\ 0 & -5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -9\\ 7 & 4\end{pmatrix}.$$

D'aquí obtenim que $B=\begin{pmatrix}0 & -5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. I, d'altra banda, $A=2B+\begin{pmatrix}1 & 13\\ 0 & -5\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0 & -5\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 13\\ 0 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

b) Calculem el producte de matrius $\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & c\\ 2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & c-8\\ 2 & ac-4\end{pmatrix}$. Per tant, tenim que $\begin{pmatrix}4 & c-8\\ 2 & ac-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b & -5\\ d & -7\end{pmatrix}$. D'aquí obtenim que $b=4$, $c-8=-5$, és a dir, $c=3$, $d=2$ i $ac-4=-7$, per tant, $3a=-3$, és a dir, $a=-1$.

3. Considereu les matrius $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 5 & 1\end{pmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ i $\mathrm{C}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ \mathrm{m} & \mathrm{n}\end{pmatrix}$, on m i n són dos nombres reals.

a) Comproveu que es compleix la igualtat $(\mathrm{A}-\mathrm{B})\cdot(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2$. *[1 punt]*

b) Determineu m i n per tal que les matrius B i C commutin, és a dir, $\mathrm{B}\cdot\mathrm{C}=\mathrm{C}\cdot\mathrm{B}$. *[1 punt]*

a) Tenim $\mathrm{A}-\mathrm{B}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ i $\mathrm{A}+\mathrm{B}=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 6 & 1\end{pmatrix}$, per tant

$$(\mathrm{A}-\mathrm{B})\cdot(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 6\\ 6 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25 & 10\\ 10 & 25\end{pmatrix}$$

D'altra banda $\mathrm{A}^2=\begin{pmatrix}26 & 10\\ 10 & 26\end{pmatrix}$ i $\mathrm{B}^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, d'on es dedueix que es verifica la igualtat demanada.

Alternativament, podem desenvolupar $(\mathrm{A}-\mathrm{B})\cdot(\mathrm{A}+\mathrm{B})$ i argumentar que per comprovar que es compleix la igualtat n'hi ha prou de veure que A i B commuten:

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{B}\cdot\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 5\\ 5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}.$$

b) Calculem els dos productes: $\mathrm{B}\cdot\mathrm{C}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ \mathrm{m} & \mathrm{n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{m} & \mathrm{n}\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$$\mathrm{C}\cdot\mathrm{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ \mathrm{m} & \mathrm{n}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ \mathrm{n} & \mathrm{m}\end{pmatrix}$$

Per tant commuten si i només si $\mathrm{m}=-1$ i $\mathrm{n}=1$.

4. Tenim unes quantes monedes d'un euro distribuïdes en tres piles. Passem dotze monedes de la tercera pila a la segona i, a continuació, en passem deu de la segona a la primera. Un cop fet això, les tres piles tenen la mateixa quantitat de monedes.
   a) Amb aquestes dades, podem determinar la quantitat de monedes que hi havia inicialment en cada pila? Raoneu la resposta. *[1 punt]*
   b) Esbrineu la quantitat de monedes que hi havia inicialment a cada pila si sabem que en total hi ha 51 monedes. [1 punt]

Anomenem x la quantitat de monedes que hi havia inicialment en la primera pila, y la quantitat de monedes que hi havia inicialment en la segona pila i, finalment, z la quantitat de monedes que hi havia inicialment en la tercera pila.
Un cop fet el traspàs de monedes descrit en l'enunciat, el contingut de cada pila és:
Primera pila: $x + 10$ monedes.
Segona pila: $y + 2$ monedes.
Tercera pila: $z - 12$ monedes.

a) Sabem que la quantitat de monedes de cada pila és la mateixa, per tant:

$$\begin{cases} x+10 = y+2 \\ x+10 = z-12 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y = -8 \\ x-z = -22 \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -1 & -22 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & -14 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = z-22 \\ y = z-14 \\ z \end{cases}$$

sistema compatible indeterminat
no podem determinar la quantitat de monedes que hi havia inicialment.

b) Si a més sabem que en total hi ha 51 monedes, aleshores tenim una equació més:

$$\begin{cases} x-y = -8 \\ x-z = -22 \\ x+y+z = 51 \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -1 & -22 \\ 1 & 1 & 1 & 51 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & -14 \\ 0 & 2 & 1 & 59 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & 87 \end{array}\right)$$

De la tercera equació, $3z = 87$, és a dir, $z = 29$.
De la segona equació, $y - z = -14$, és a dir, $y = 15$
De la primera equació, $x - y = -8$, és a dir, $x = 7$.

Alternativament, $\begin{cases} x+10 = 17 \\ y+2 = 17 \\ z-12 = 17 \end{cases}$

6. Considereu les matrius: $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   a. Calculeu el valor del paràmetre a per al qual es compleix que $A \cdot B = B \cdot A$. *[1 punt]*
   b. Per al valor $a = 2$, trobeu una matriu X, tal que $A \cdot X \cdot A = B$. *[1 punt]*

a) Calculem els productes $A \cdot B$ i $B \cdot A$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & -a+1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ i } B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

per tal que es compleixi la igualtat cal que $a = 1$.

b) Aïllant obtenim que $X = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1}$,

$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ i fent els productes obtenim $X = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.