Exercicis PAU per repàs cientific

Exercicis amb resultat per comprovació.

Convocatòria 2015 – Serie2 - Cientif

1. Considereu el sistema d'equacions lineals següent: $\left.\begin{aligned} -3x+2y+3z &= 0 \\ (a-2)y-3z &= 0 \\ -x-y+(-a-3)z &= 0 \end{aligned}\right\}$.
   a) Calculeu per a quins valors del paràmetre a el sistema té més d'una solució
   b) Resoleu el sistema per al cas a=-3

   a) $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & a-2 & -3 \\ -1 & -1 & -a-3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & a-2 & -3 \\ -1 & -1 & -a-3 \end{vmatrix} = 3(a-2)(a+3)+6+3(a-2)+9 = 3(a^2+2a-3). = 0 \Rightarrow a = \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \begin{cases} \boxed{a=1} \\ \boxed{a=-3} \end{cases}$. El problema també es pot resoldre triangulant per Gauss la matriu A

   b) $\left.\begin{aligned} -3x+2y+3z &= 0 \\ -5y-3z &= 0 \\ -x-y &= 0 \end{aligned}\right\}$ *rang(A)=2* $\Rightarrow x=-y$ i $z=\frac{-5y}{3}$. $\Rightarrow \boxed{\left(-y,\ y, \frac{-5y}{3}\right)}$.

2. Sigui r la recta de l'espai que té per equació $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = z$ i sigui P el punt de coordenades (6, 0, -1).
   a) Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma) del pla que passa pel punt P i talla perpendicularment la recta r.
   b) Trobeu l'equació paramètrica del pla que passa pel punt P i conté la recta r.

   a) $Q=(1,-3,0)$ $v=(2,-1,1) \Rightarrow 2x-y+z=D$ i si ha de passar pel punt $P=(6,0,-1) \Rightarrow 2\cdot 6-0+(-1)=D$ i per tant $D=11$. $\Rightarrow \boxed{2x-y+z=11}$.

   b) $v=(2,-1,1)$ i $\overrightarrow{PQ}=Q-P=(1,-3,0)-(6,0,-1)=(-5,-3,1) \Rightarrow (x,y,z)=(6,0,-1)+\lambda(2,-1,1)+\mu(-5,-3,1)=(6+2\lambda-5\mu, -\lambda-3\mu, -1+\lambda+\mu)$

3. Responeu a les qüestions següents:
   a) Determineu l'equació de la recta tangent a la corba $y=x^3$ en el punt d'abscissa x=2
   b) Calculeu l'àrea de la regió plana finita limitada per la corba $y=x^3$ i la recta y = 3x – 2

   a) $y'=3x^2 \Rightarrow y(2)=8$ i $y'(2)=12 \Rightarrow \boxed{y=}\ 12(x-2)+8\ \boxed{=12x-16}$.

   b) $x^3=3x-2, \Rightarrow x^3-3x+2=0$. Ruffini $x^3-3x+2=(x-1)^2\cdot(x+2)=0 \Rightarrow x=-2$ i $x=1$.

   $\int_{-2}^{1}(x^3-(3x-2))dx = \int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx = \left(\frac{x^4}{4}-3\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-2}^{1} = \left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2\right)-(4-6-4) = \frac{3}{4}+6 = \boxed{\frac{27}{4}u^2}$

4. Considereu a ℝ3 la recta que té per equació r:(x, y, z)=(–4+2λ,–2,1–λ) i els plans π_1 i π_2 d'equacions π_1:x+2y+2z=–1 i π_2:x–2y+2z=–3, respectivament.
   a) Determineu la posició relativa de π_1 i π_2
   b) Comproveu que tots els punts de la recta r estan situats a la mateixa distància dels plans π_1 i π_2.

   Nota: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x0, y0, z0) al pla: $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

   Sol: a) Vectors normals (1,2,2,) (1,-2-2) no són proporcionals → no són paral·lels. → es tallen en una recta

   b)Un punt genèric $R=(-4+2\lambda,-2,1-\lambda)$ $\rightarrow d(R,\pi_1)=d(R,\pi_2)$.

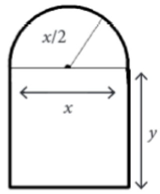
   $\frac{|-4+2\lambda+2(-2)+2(1-\lambda)+1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{|-4+2\lambda-2(-2)+2(1-\lambda)+3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} \rightarrow \frac{|-5|}{3} = \frac{|5|}{3}$ $R=(-4+2\lambda,-2,1-\lambda)$ tota la recta r equidista dels dos plans

5. Responeu a les qüestions següents:
   a) Calculeu la matriu de la forma $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ que satisfà A^2–A=I, en què I és la matriu identitat, $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   b) Calculeu A^{-1} i comproveu que el resultat es correspon amb el que obteniu de deduir la matriu A^{-1} a partir de la igualtat A^2–A=I.

   a) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+a & a \\ 1 & a \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a=1 \Rightarrow \boxed{A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

   b) $\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \Rightarrow A\cdot(A-I)=I=(A-I)\cdot A. \Rightarrow \boxed{A^{-1}=A-I=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$

6. La portalada d'una catedral està formada, en la part superior, per un arc de mitja circumferència que recolza sobre dues columnes, com il·lustra la figura adjunta, en què x és el diàmetre de la cir-cumferència, és a dir, la distància entre columnes, i y és l'alçària de cada columna.
   a) Comproveu que la funció $f(x,y)=\frac{\pi x^2}{8}+xy$ determina l'àrea d'aquesta portalada.
   b) Si el perímetre de la portalada fa 20m, determineu les mides x i y de la portalada que en maximitzen l'àrea.



   a) $\frac{\pi\,(x/2)^2}{2}+xy=\boxed{\frac{\pi\,x^2}{8}+xy}$

   b) $\pi\frac{x}{2}+2y+x=20, \Rightarrow \frac{\pi+2}{2}x+2y=20 \Rightarrow y=10-\frac{\pi+2}{4}x \Rightarrow A(x)=\frac{\pi\,x^2}{8}+x\left(10-\frac{\pi+2}{4}x\right)=\frac{\pi}{8}x^2+10x-\frac{\pi+2}{4}x^2=-\frac{\pi+4}{8}x^2+10x$

   $A'(x)=-\frac{\pi+4}{4}x+10 \Rightarrow A'(x)=0,$ $\boxed{x=\frac{40}{\pi+4}\ metres}$ $A''(x)=-\frac{\pi+4}{4}<0 \Rightarrow x=\frac{40}{\pi+4}$ tindrem un màxim.

2015. 1.- Considereu el sistema d'equacions en què m és un paràmetre re $\left.\begin{array}{rcl} x-2y-z & = & 0 \\ -mx+3y+z & = & 0 \\ x+y & = & 4 \end{array}\right\}$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre m

b) Resoleu el sistema per a $m = 1$.

a) $\boxed{\text{Si } m \neq 0}$ rang$(A) = 3$ i per tant rang$(A') = 3$ **SCD** $\boxed{\text{Si } m = 0,}$ rang$(A) = 2$, ja que $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, però rang $(A/b) = 3$, **S. Incomp.**

b) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = \dfrac{4}{1} = 4,\quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{m} = \dfrac{0}{1} = 0,\quad z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{1} = \dfrac{4}{1} = 4 \Rightarrow x = 4, y = 0 \text{ i } z = 4.$

2015. 2.- Sigui la funció $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa x= 1.

b) Calculeu les abscisses dels punts de la gràfica en què hi ha un mínim relatiu, un màxim relatiu o una inflexió.

c) $f'(x) = 3x^2 - 8x + 4. \Rightarrow f(1) = 1$ i $f'(1) = -1 \Rightarrow y = f'(a)(x-a) + f(a) = (-1)(x-1) + 1 = -x + 2.$

d) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x \quad f'(x) = 3x^2 - 8x + 4 \quad f''(x) = 6x - 8 \quad f'''(x) = 6$

$f'(x) = 0$ obtenim $x = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{6} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{8 \pm 4}{6} = \begin{cases} 2 & f''(2) = 6 \cdot 2 - 8 = 4 > 0 \text{ i per tant } \boxed{\text{en } x = 2 \text{ la funció té un mínim relatiu}}. \\ \frac{2}{3} & f''\left(\frac{2}{3}\right) = 6 \cdot \frac{2}{3} - 8 = -4 < 0 \text{ i per tant } \boxed{\text{en } x = \frac{2}{3} \text{ la funció té un màxim relatiu}} \end{cases}$

$f''(x) = 0$ obtenim $x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$. $f'''\left(\frac{4}{3}\right) = 6 \neq 0$ i per tant en $\boxed{x = \frac{4}{3} \text{ la funció té un punt d'inflexió}}$.

2015. 3.- Siguin el punt P= (2,0,2) i el pla π d'equació x – y + z = 1

a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa pel punt P i és perpendicular al pla

b) Calculeu la distància del punt P al pla

c) $(A,B,C) = (1,-1,1) \Rightarrow (x,y,z) = (2,0,2) + \lambda(1,-1,1) = (2+\lambda, -\lambda, 2+\lambda)$

d) $d(P,\pi) = \left|\dfrac{2-0+2-1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}\right| = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,unitats.$

2015. 4.- Sigui la funció $f(x) = x \cdot \sin(x)$. Calculeu la primitiva de la funció $f(x)$ que passa pel punt ($\pi/2$,0) (unitats en radians).

$F(x) = \int x \cdot \sin(x)\, dx \Rightarrow$ per parts $\begin{array}{cc} u = x & du = 1\,dx \\ dv = \sin(x)\,dx & v = -\cos(x) \end{array} \Rightarrow F(x) = \int x \cdot \sin(x)\, dx = -x \cdot \cos(x) + \int \cos(x)\, dx = -x \cdot \cos(x) + \sin(x) + C$

constant C. F passa pel punt $(\frac{\pi}{2}, 0)$. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + C = 1 + C$, d'on $1 + C = 0$, és a dir, $C = -1$. $\Rightarrow F(x) = -x \cdot \cos(x) + \sin(x) - 1$

2015. 5.- Sigui A una matriu quadrada que compleix que $A^3 = I$, en què I és la matriu identitat.

a) Demostreu que la matriu A té inversa i que $A^{-1} = A^2$

b) En el cas de $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, calculeu si hi ha cap valor del paràmetre a per al qual $A^3 = I$

a) $A \cdot A^2 = A^2 \cdot A = I$, $\boxed{\text{per tant } A \text{ té inversa i } A^{-1} = A^2}$.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1-a & -a \\ 1 & 4-a \end{pmatrix}$ i $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3a-a^2 \\ a-3 & 3a-8 \end{pmatrix}$ $\quad \left.\begin{array}{rcl} 1 & = & 1 \\ 3a-a^2 & = & 0 \\ a-3 & = & 0 \\ 3a-8 & = & 1 \end{array}\right\}$ $a = 3$. $\boxed{\text{Així per a } a = 3,\ A^3 = Id}$.

2015. 6.- Siguin a $\mathbb{R}^3$ el punt P = (2,3,3) i la recta r: (x,y,z) = (1,2,3) + t(1,1,1).

a) Calculeu l'equació paramètrica del pla que passa pel punt P i conté la recta r.

b) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma Ax – By + Cz + D) del pla que passa pel punt P i és perpendicular a la recta r.

a) $R = (1,2,3)$ vector director $v_r = (1,1,1)$. $\Rightarrow v_r = (1,1,1)$ i $\overline{PR} = R - P = (-1,-1,0)$. $\Rightarrow \boxed{(x,y,z) = (2,3,3) + \lambda(1,1,1) + \mu(-1,-1,0) = (2+\lambda-\mu, 3+\lambda-\mu, 3+\lambda)}$

b) pla ha de ser perpendicular amb r, $v_r = (1,1,1)$ serà el vector normal del pla, I quan fem passar el pla pel punt $P = (2,3,3)$ obtenim $\boxed{x+y+z=8}$.

2015. 7.- Calculeu l'àrea de la regió del pla limitada en el primer quadrant per les gràfiques de les funcions $y = x^2$, $y = 4x^2$ i $y=9$

àrea limitada per dues paràboles $\quad x^2 = 9$ porta a $x = 3$.

$4x^2 = 9$ porta a $x = +\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.

$$\int_0^{3/2} (4x^2 - x^2)dx + \int_{3/2}^{3} (9 - x^2)dx = \int_0^{3/2} 3x^2 dx + \int_{3/2}^{3} (9 - x^2)dx = \frac{27}{8} + (27 - 9) - \left(\frac{27}{2} - \frac{9}{8}\right) = \boxed{9\,u^2}.$$

1. Siguin r i s les rectes, $r: \frac{x-2}{3} = y = \frac{z+1}{4}$ i $s: (x, y, z) = (1 + 2\alpha, 3 - \alpha, 4 + 3\alpha)$.
   a)Comproveu que els punts mitjans dels segments que tenen un extrem situat sobre la recta r i l'altre extrem situat sobre la recta s formen un pla.
   b)Trobeu l'equació general del pla de l'apartat anterior.

a) Els punts generals $R = (2 + 3\lambda, \lambda, -1 + 4\lambda)$
$S = (1 + 2\alpha, 3 - \alpha, 4 + 3\alpha)$.

punts mitjans: $M = \frac{R+S}{2} = \left(\frac{3 + 3\lambda + 2\alpha}{2}, \frac{3 + \lambda - \alpha}{2}, \frac{3 + 4\lambda + 3\alpha}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + \lambda\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{4}{2}\right) + \alpha\left(\frac{2}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

b) Sabem que és el pla que passa pel punt $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ i té per vectors directors els vectors directors $(3,1,4)$ i $(2,-1,3)$, per tant seran els punts (x, y, z) que satisfan l'equació

$$\begin{vmatrix} x - \frac{3}{2} & 3 & 2 \\ y - \frac{3}{2} & 1 & -1 \\ z - \frac{3}{2} & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 7\left(x - \frac{3}{2}\right) - 1\left(y - \frac{3}{2}\right) - 5\left(z - \frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{7x - y - 5z = \frac{3}{2}}$$

Exercicis sense amb solució resumida.

Juny 2014.- 1 Considereu la matriu M. → $M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix}$
   a) Calculeu el rang de la matriu M en funció dels valors del paràmetre a.
   b)Discutiu i resoleu el sistema d'equacions lineals.
   Sol: $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a+1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Sempre 3 b) Per Gauss o Cramer: x=1 ; y=0 ; z=0

Juny 2014.- 2 Considereu el punt A=(1, 2, 3):
   a) Calculeu el punt simètric del punt A respecte de la recta d'equaciór:(x, y, z)=(3+λ,1,3–λ)
   b) Calculeu el punt simètric del punt A respecte del pla que té per equació π:x+y+z=3 R: (-1,0,1)
   Sol: Per a fer el simètric respecte de la recta construirem primer el pla, que talla perpendicularment la recta i que passa pel punt A x-z = -2. Calculem el punt intersecció, diguem-ne B , del pla amb la recta, el que seria el punt projecció del punt A sobre la recta (2,1,4), substituint l'equació paràmetrica de la recta en l'equació del pla. Y el punt: A' = A + 2 AB = (3,0,5)
   b) Fem la recta perpendicular al plà amb vector (1,1,1) que pasa per (1,2,3) Intersecció:(0,1,2) → A' = A + 2 AB = (-1,0,1)

Juny 2014.- 3. Un nedador és al mar en un punt N, situat a 3km d'una platja recta, i just al davant d'un punt S, situat a la platja arran de l'aigua; i vol anar a un punt A, situat també arran de l'aigua i a 6km del punt S, de manera que el triangle NSA és rectangle en el vèrtex S. El nedador neda a una velocitat constant de 3km/h i camina a una velocitat constant de 5km/h.
   a)Si P és un punt entre el punt S i el punt A que està a una distància x de S, demostreu que el temps, en hores, que necessita el nedador per a nedar del punt N al punt P i caminar des del punt P fins al punt A és determinat per l'expressió -> $t(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{6-x}{5}$
   b)Calculeu el valor de x que determina el temps mínim que cal per a anar del punt N al punt A, passant per P. Quin és el valor d'aquest temps mínim.

$$t'(x) = \frac{x}{3\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow 5x = 3\sqrt{x^2+9} \Rightarrow 25x^2 = 9x^2 + 81 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{81}{16}} = \pm 2{,}25$$ → t = 2 hores

Juny 2014.- 5. Siguin r i s les rectes de ℝ3 d'equacions $r: \frac{x-2}{3} = y = \frac{z+1}{4}$ i s:(x, y, z)=(1+2α, 3–α, 4+3α), amb α∈ℝ.
   a)Comproveu que els punts mitjans dels segments que tenen un extrem situat sobre la recta r i l'altre extrem situat sobre la recta s formen un pla.
   b)Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma Ax+By+Cz=D) del pla de l'apartat anterior.
   Sol: $M = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + \lambda\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{4}{2}\right) + \alpha\left(\frac{2}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ $7x - y - 5z = \frac{3}{2}$

Juny 2014.- 6. Responeu a les qüestions següents:

a)Demostreu que si A és una matriu quadrada que satisfà la igualtat A2=I, on Iés la matriu identitat, aleshores A és invertible i A–1 satisfà (A–1)2=I.

b)Calculeu l'expressió general de les matrius de la forma $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix}$ amb b≠0 que satisfan la igualtat A^2=I.

Sol: R: A·A = I ; A^{-1} = A ; $A=\begin{pmatrix} -2 & b \\ -3/_{b} & 2 \end{pmatrix}$

Juny 2014.- 1b. Considereu la funció *f(x)* → $f(x)=\frac{x+3}{x-2}$

a) Calculeu les asímptotes verticals, horitzontals i obliqües de la funció f.

b) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en aquells punts en què la recta tangent sigui paral·lela a la recta y=–5x+4. R: AV: x=2 AH: y=1 ; x=1: y=-5x+1 x=3: y=-5x+21

Juny 2014.- 2b. Responeu a les qüestions següents:

$$\begin{cases} (k-1)y+(k^2-1)z=0 \\ (4k+1)x-y-7z=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema d'equacions lineals en funció dels valors de k.

b) Resoleu el sistema per a k=1

Sol: a) R= Si k≠1 i k≠-3/2 R=3: SCD; si k=1 R=3 SCI 1 grau llibertat ; si k=-3/2 SI

b) (1/6 + z , -1/6 -2·z , z)

Juny 2014.- 3b. Siguin els punts P=(1, 1, 0), Q=(1, 0, 1) i R=(0, 1, 1) i el pla π: x+y+z=4.

a) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma Ax+By+Cz=D) del pla que passa pels punts P, Q i R.

b) Si S és un punt de π, comproveu que el volum del tetraedre de vèrtexs P, Q, R i S no depèn del punt S.

R: a) x=y=z=2 b) V = 1/3 u^3

Juny 2014.- 4b Donats els plans π1: x–4y+z=2m–1 i π2: 2x–(2m+2)y+2z=3m+1,

a) Determineu els valors de m perquè els plans π1 i π2 s'intersequin en una recta i calculeu un vector director de la recta resultant que no depengui de m.

b) Sigui el pla π:3x–2y+3z=8. Estudieu la ***posició relativa*** del pla π amb la recta r defi-nida per la intersecció dels plans π1 i π2 quan m=1

R: a) $\begin{cases} \pi_1:\ x-4y+z=2m-1 \\ \pi_2:\ 2x-(2m+2)y+2z=3m+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -2m-2 \end{vmatrix} = -2m-2+8=-2m+6=0 \Leftrightarrow m=3$

s'intersecten en una recta si i només si $m \neq 3$.

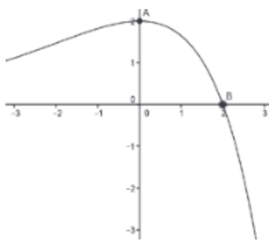
b) v = (1,0,-1) ; r paral·lela i continguda en el pla.

Juny 2014.- 5b Responeu a les qüestions següents:

a) Si A i B són dues matrius quadrades d'ordre n, demostreu que (A+B)2=A2+2AB+B2⇔AB=BA.

b) Si M1 i M2 són dues matrius de la forma , amb a, b∈ℝ, comproveu que el producte M1·M2 té també la mateixa forma i que M1·M2=M2·M1 R: a) BA=AB ; M1·M2 = M2·M1

Juny 2014.- 6b Responeu a les qüestions següents:



a) La funció *f(x)=(b–x)e*^{ax}, amb a i b constants, té la representació gràfica següent i sabem que passa pels punts A=(0, 2) i B=(2, 0), i que en el punt A la recta tangent a la gràfica és horitzontal. Calculeu els valors de a i b.

b) calculeu: $\int_1^2 x \ln x \, dx$.

R: a) $f(x)=(2-x)e^{x/2}$ b) u= lnx v = x^2/2 dv=xdx du = 1/x dx → $2\ln 2-\frac{3}{4}$.

Sept 2014.- 1 Siguin les funcions donades *f(x)* i *g(x)*

$f(x)=\frac{e^{ax}+b}{4}$ i $g(x)=+\sqrt{3x+4}$.

a) ***Domini*** i recorregut de C.

b) Calculeu per a quins valors de a i de b les gràfiques de les dues funcions són tan-gents (és a dir, tenen la mateixa recta tangent) en el punt d'abscissa x=0

R: a) Dom g(x) = [-4/3 , +∞) Rec: [0, +∞) b) a=3 , b=7

2016 – Geometria ---

2016: A $\mathbb{R}^3$, siguin la recta r que té per equació (x, y, z)=(1+λ,λ,1–λ) i el pla π d'equació 2x–y+z = –2.

a)Determineu la ***posició relativa*** de la recta r i el pla π.

b)Calculeu la distància entre la recta r i el pla π.

Sol: a) fem el producte escalar de vector dir. de recta y asoc. pla (1,1,-1)(2,-1,1)=0 per tant vectors ortogonals → recta paral·lela al pla. Com que el punt P no satisfà l'equació del pla ,la recta queda paral·lela exterior.

mètode 2: Si fem sistema d'equacions lineals format per recta i pla → Sistema Incompatible

b) agafar un P de r y fer distancia de Punt a pla: $d(P,\pi) = \frac{|2\cdot1-1\cdot0+1\cdot1+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}} = \left|\frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}\right|$

2016: Siguin a R^3 el pla d'equació i els punts (3,-1,2)i (1,1,-2).

a) Comproveu que els punts i són ***simètrics*** respecte del pla .

b)Si és la recta dels punts de la forma en què és un paràmetre real i (), verifiqueu que els punts mitjans dels segments pertanyen al pla .

Sol: comprovarem que el vector és perpendicular al pla i que el punt mitjà del segment pertany al pla .

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2,2,-4) \sim (1,-1,2) = v_n$ punt mitjà del segment $M = \frac{A+B}{2} = (2,0,0)$

b) $P = (1,1,-2) + \lambda(1,1,0) = (1+\lambda, 1+\lambda, -2)$ $\quad M = \frac{A+P}{2} = \frac{(4+\lambda,\lambda,0)}{2} = (2+\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, 0)$

2016: Siguin les rectes s $(x,y,z) = (2,3,-3) + \lambda(1,-1,0)$ i s: $\frac{x-3}{2} = y-5 = z+2.$

a) Estudieu si les rectes i són paral·leles o perpendiculars.

b)Determineu la posició relativa entre les rectes i i calculeu l'equació paramètrica de la recta que talla perpendicularment la recta i la recta .

Sol: els vectors directors no son proporcionals,

b) Igualem les paramètriques y veiem que es tallen en (1,4, -3)

--- *sistemes* ----

2016: 1. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\left.\begin{aligned} 2x+4y+4z &= 4k-7 \\ 2x-ky &= -1 \\ -2x &= k+1 \end{aligned}\right\}$$

Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre real *k*.

Resoleu el sistema per al cas *k* = 0.

Sol:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 4k-7 \\ 2 & -k & 0 & -1 \\ \underbrace{-2 \quad 0 \quad 0}_{A} & & & k+1 \end{array}\right)}_{A'} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & -k & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8k.$$

K≠0: rang (A)=3, rang(A') =3 = nombre d'incògnites. Per tant, el sistema és Compatible Determinat.

K=0: det(A) = 0, rang(A) <3, però el menor *det* ≠0

ens diu que rang(A)=2 → Sistema Compatible Indet. amb 1 grau de llibertat: n- rang(A) = (3-2) = 1

Para k=0: $\left.\begin{aligned} 2x+4y &= -7-4z \\ 2x &= -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$ substituïnt $-1+4y = -7-4z \quad y = -\frac{6+4z}{4} = -\frac{3+2z}{2}$ $\boxed{\left(\frac{-1}{2}, \frac{-3-2z}{2}, z\right)}$

--- *Derivadas* –

2016. Sigui la funció *f(x) = x·e* $^{x-1}$

a) Calculeu l'equació de la ***recta tangent*** a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa x = 1.

b) Determineu en quins intervals la funció *f* és creixent i en quins intervals és decreixent

$f'(x) = 1\cdot e^{x-1} + x\cdot e^{x-1} = (1+x)e^{x-1}$

$y = f'(a)(x-a) + f(a) \Rightarrow f(a) = f(1) = 1\,e^0 = 1$, i $f'(a) = f'(1) = 2\,e^0 = 2 \Rightarrow \boxed{y} = 2\cdot(x-1)+1 \boxed{= 2x-1}$

b) Creixent $(-\infty,-1)$ Decreixent: $(-1,\infty)$

2016: a) Calculeu els màxims relatius, mínims relatius i punts d'inflexió de la funció:

b) Expliqueu raonadamentque si f(x) és una funció amb derivada primera contínua en l'interval [a,b] i que satisfà que f'(a)>0 yf'(b) <0. Aleshores hi ha, com a mínim, un punt de l'interval (a,b) en què la recta tangent a la gràfica de f(x) en aquest punt és horitzontal.

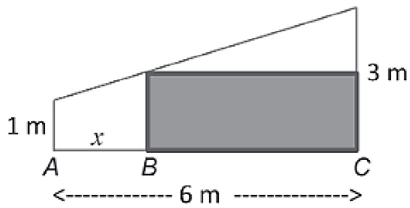
Sol: a) →

b) Aplicant Bolzano

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 2 \Rightarrow f''(x) = 12x - 18 \Leftrightarrow$ $M = (1, f(1)) = (1,1)$; $m = (2, f(2)) = (2,0)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ Si $x < \frac{3}{2}$ còncava. Si $x > \frac{3}{2}$ convexa. $\boxed{\text{punt d'inflexió en el punt } \left(\frac{3}{2}, f(\frac{3}{2})\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)}$

2017.- 6. El croquis de sota representa la paret d'unes golfes amb el sostre inclinat, en la qual es vol construir un armari rectangular com el de la zona ombrejada.
a)Expresseu l'àrea del rectangle en funció de la longitud x del segment AB .
b) Determineu les dimensions del rectangle si volem que tingui una superfície màxima i calculeu aquesta superfície màxima.



Sol:

$$A(x) = (6-x)\cdot\left(\tfrac{1}{3}x+1\right) = \boxed{-\tfrac{1}{3}x^2+x+6} \Rightarrow A'(x) = -\frac{2}{3}x+1=0 \Rightarrow \frac{2}{3}x=1 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \quad A''(x)<0 \text{ màxim}$$

$$6-\frac{3}{2}=\boxed{\frac{9}{2}} \text{ de base i } \frac{1}{3}\frac{3}{2}+1=\boxed{\frac{3}{2}} \text{ d'alçada.} \Rightarrow \text{L'àrea màxima serà } A\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{2}\cdot\frac{3}{2}=\boxed{\frac{27}{4}\,u^2}$$

Integrals.-

Juny 2014. 4. Calculeu l'àrea de la regió del pla limitada en el primer quadrant per les gràfiques de les funcions: $y=x^2$, $y=4x^2$ i $y=9$

Sol: $\int_0^{3/2}(4x^2-x^2)dx+\int_{3/2}^{3}(9-x^2)dx = 9\,u^2$

2016. Siguin les paràboles: $f(x) = x^2 + k^2$ y $g(x)\ -x^2 + 9k^2$
a) Calculeu les abscisses, en funció de k, dels punts d'intersecció entre les dues paràboles
b) Calculeu el valor del paràmetre k perquè l'àrea compresa entre les paràboles sigui de 576 unitats quadrades.

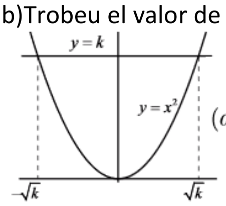
Sol: a) $x^2+k^2=-x^2+9k^2 \Rightarrow \boxed{x=\pm 2k}$ b) $A=\int_{-2k}^{2k}[(-x^2+9k^2)-(x^2+k^2)]\,dx = \frac{64k^3}{3} \Rightarrow \boxed{k=3}$

2017.- Responeu a les qüestions següents:
a) Comproveu que la recta tangent a la corba $y = x^2$ en el punt d'abscissax=2 és larecta y=4x–4 i calculeu els punts d'intersecció d'aquesta recta amb els eixos de coordenades.
b)Calculeu l'àrea limitada per la corba de l'apartat anterior, la recta tangent enx=2 i l'eix de les abscisses.

$$f'(x)=2x \text{ i } f'(2)=4 \Rightarrow y-4=4(x-2) \Rightarrow y=4x-4 \mid \text{quan } x=0\ y=0\ \boxed{(0,-4)} \text{ i } \boxed{(1,0)}$$

$$\boldsymbol{b)}\ \int_0^1 x^2dx+\int_1^2\left(x^2-(4x-4)\right)dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left.\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right)\right]_1^2=\frac{2}{3}u^2$$

2013.- 2.- La corba $y=x^2$ i la recta y=k, amb k >0, determinen una regió plana. (a)Calculeu l'àrea d'aquesta regió en funció del paràmetre k.(b)Trobeu el valor de k perquè l'àrea limitada sigui $\sqrt{\ }6u^2$.



$$(a)\ A=\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}}\left(k-x^2\right)dx=\left[kx-\frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}}=\frac{4k\sqrt{k}}{3} \quad (b)\ \frac{16k^3}{9}=6 \Longrightarrow k=\frac{3}{2}$$