Ecuaciones trigonométricas

1) Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas

a) $2tgx - 3\ cotgx - 1 = 0$
b) $\cos^2x - 3sen^2x = 0$
c) $sen(2x + 60) + sen(x + 30) = 0$
d) $sen^2x - \cos^2x = 1/2$
e) $sen2x \cdot \cos x = 6sen^3x$

Indicaciones:

Debes intentar reducir toda la expresión a una única razón trigonométrica (que todo sean senos, o cosenos, por ejemplo). Cuando puedas llegar a una expresión del tipo *seno(algo) = un número,* sólo tendrás que usar la función arco correspondiente (arcoseno, arcotangente, etc.).
Para conseguir que todas las razones trigonométricas sean iguales no hay una regla fija; tendrás que probar
Btrasteando con las siguientes fórmulas básicas:

$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\qquad$ $tg\alpha = sen\alpha / \cos\alpha$

$1 + tg^2\alpha = sec^2\alpha$ $\qquad$ $1 + cotg^2\alpha = cosec^2\alpha$

Ángulo suma

$sen(\alpha \pm B) = sen\alpha \cdot \cos B \pm \cos\alpha \cdot senB$
$\cos(\alpha \pm B) = \cos\alpha \cdot \cos B \pm sen\alpha \cdot senB$
$tg(\alpha + B) = (tg\alpha + tgB) / (1 - tg\alpha \cdot tgB)$
$tg(\alpha - B) = (tg\alpha - tgB) / (1 + tg\alpha \cdot tgB)$

Ángulo doble

$sen2\alpha = 2sen\alpha \cdot \cos\alpha$
$\cos 2\alpha = \cos 2\alpha - sen2\alpha$
$tg2\alpha = (2tg\alpha) / (1 - tg2\alpha)$

Ángulo mitad

$sen\alpha/2 = \pm \sqrt{((1 - \cos\alpha)/2)}$
$\cos\alpha/2 = \pm \sqrt{((1 + \cos\alpha)/2)}$
$tg\alpha/2 = \pm \sqrt{((1-\cos\alpha)/(1+\cos\alpha))}$

Transformar sumas en productos

$sen\alpha + senB = 2sen((\alpha+B)/2) \cdot \cos((\alpha-B)/2)$
$sen\alpha - senB = 2\cos((\alpha+B)/2) \cdot sen((\alpha-B)/2)$
$\cos\alpha + \cos B = 2\cos((\alpha+B)/2) \cdot \cos((\alpha-B)/2)$
$\cos\alpha - \cos B = -2sen((\alpha+B)/2) \cdot sen((\alpha-B)/2)$

Soluciones

a) $2tgx - 3\ cotgx - 1 = 0$

Transformamos la cotg en tg. Llegamos a una ecuación de segundo grado.
$2tgx - 3/tgx - 1 = 0 \rightarrow 2tg^2x - 3 - tgx = 0$

Resolvemos con la fórmula de la ecuación de segundo grado, siendo la incógnita tgx. Obtenemos dos soluciones:
Solución 1: $tgx = 3/2 \rightarrow x = 56{,}31^o + 180k$ $\quad$ Solución 2: $tg\ x = -1 \rightarrow x = 135^o + 180k$

b) $\cos^2x - 3sen^2x = 0$

$1 - sen^2x - 3sen^2x = 0 \rightarrow 1 - 4sen^2x = 0 \rightarrow sen^2x = 1/4 \rightarrow senx = \pm 1/2$
$x = arcsen1/2 \rightarrow \quad x_1 = 30^o + 360k\ \ x_2 = 150^o + 360k$
$x = arcsen(-1/2) \rightarrow \quad x_3 = 210^o + 360k\ \ x_4 = 330^o + 360k$

c) sen(2x + 60) + sen(x + 30) = 0

Convertimos la suma del seno de dos ángulos en un producto (revisa las fórmulas básicas):
$2sen\,(((2x+60)+(x+30))/2)\cdot cos\,(((2x+60) – (x + 30))/2) = 0$
$2sen\,(3x/2 + 45)\cdot cos\,(x/2 + 15) = 0$ $sen\,(3x/2 + 45)\cdot cos\,(x/2 + 15) = 0$ $sen\,(3x/2 + 45) = 0$
$\rightarrow x_1 = -30º + 120k$

$cos\,(x/2 + 15) = 0 \rightarrow x_2 = 150º + 360k$
$x_3 = 510º + 360k$

d) sen²x -cos²x = 1/2

Cambiamos el signo a los dos lados de la ecuación, para que lo de la izquierda se convierta en el coseno del ángulo doble:

$sen^2x - cos^2x = 1/2$
$cos^2x – sen^2x = -1/2$
$cos2x = -1/2$
$2x_1 = 120º + 360k \rightarrow x_1 = 60º + 180k$
$2x_2 = 240 + 360k \rightarrow x_2 = 120 + 180k$

e) sen2x·cosx = 6sen³x

Transformamos el seno del ángulo doble, y pasamos el 2 dividiendo al lado derecho.
$2senx\cdot cosx\cdot cosx = 6sen^3x$

$senx\cdot cosx\cdot cosx = 3sen^3x$

$senx\cdot cos^2x – 3sen^3x = 0$

Sacamos factor común

$senx(cos^2x – 3sen^2x) = 0$

Como es un producto de dos cosas que dan cero, o bien la primera es cero o bien lo es la segunda. Así, por un lado, $senx = 0 \rightarrow x_1 = 0º + 180k$ Por otro,

$cos^2x – 3sen^2x = 0$ $1 –$
$sen^2x – 3sen^2x = 0$ $1 –$
$4sen^2x = 0$ $sen^2x =$
$1/4$ $senx = \pm 1/2$
$x = arcsen1/2 \rightarrow$ $x_2 = 30º+ 360k$
$x_3 = 120º +$
$360k$
$x = arcsen(-1/2) \rightarrow$ $x_4= 210º+ 360k$
$x_5 = 330º +$
$360k$

f) 2cosx = 3tgx

$2cosx = 3senx/cosx$
$2cos^2x = 3senx$
$2(1-sen^2x) = 3\,senx$
$2 – 2sen^2x – 3senx = 0$

Resolvemos como una ecuación de segundo grado en la que la incógnita es senx. Obtenemos dos soluciones: Solución 1: $senx = 1/2 \rightarrow x1 = 30º + 360k$ $x2 = 150º + 360k$
Solución 2: $senx = -2 \rightarrow$ se descarta, porque ningún seno o coseno puede valer más de 1 o -1.

$$\boxed{\cos^2 x - 3sen^2 x = 0}$$

$$1 - sen^2 x - 3sen^2 x = 0 \qquad 1 - 4sen^2 x = 0 \qquad sen^2 x = \frac{1}{4} \qquad sen\,x = \pm\frac{1}{2} \qquad x = \arcsen\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 30° + 360°k \\ x_2 = 150° + 360°k \end{cases}$$

$$\boxed{2tg\,x - 3\cotg\,x - 1 = 0}$$

$$2tg\,x - \frac{3}{tg\,x} - 1 = 0 \qquad 2tg^2\,x - tg\,x - 3 = 0 \qquad tg\,x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4}$$

$$tg\,x = \frac{3}{2} \qquad x = 56°18'35'' + 180°k$$

$$tg\,x = -1 \qquad x = 135° + 180°k$$

$$\boxed{\cos 2x = 1 + 4sen\,x}$$

$$\cos^2 x - sen^2 x = 1 + 4sen\,x \qquad 1 - sen^2 x - sen^2 x = 1 + 4sen\,x \qquad 2sen^2 x + 4sen\,x = 0$$

$$2sen\,x\,(sen\,x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} sen\,x = 0 \\ sen\,x + 2 = 0 \end{cases} \qquad x = \arcsen 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360°k \\ x_2 = 180° + 360°k \end{cases} \qquad x = 0° + 180°k$$

$$\boxed{3sen^2 x - 5sen\,x + 2 = 0}$$

$$sen\,x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}$$

$$sen\,x = 1 \qquad x = 90° + 360°k$$

$$sen\,x = \frac{2}{3} \qquad x = \begin{cases} 41°48'37'' + 360°k \\ 138°11'23'' + 360°k \end{cases}$$