Logaritmos

Definición:

Si: $\boxed{\log_a b = x \longleftrightarrow a^x = b}$ Importante aprender

El logaritmo se convierte en una función exponencial.

- Ejemplo de multiplicación en forma exponencial: $a^{b1} \cdot a^{b2} = a^{b1+b2}$
- Ejemplo de multiplicación en forma logarítmica: $\text{Log } b_1 \cdot b_2 = \log b_1 + \log b_2$

Por lo tanto el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores. De igual manera se demostraría que el logaritmo de un cociente es la resta de los logaritmos, etc… Así con los logaritmos las multiplicaciones se convierten en sumas, las divisiones en restas y la exponenciación en multiplicaciones. Esto facilita mucho las operaciones de grandes cantidades.

Nota: log *x* es lo mismo que $\log_{10} x$ -> Llamado logaritmo decimal (en base 10)
ln *x* es lo mismo que $\log_e x$ - > Llamado logaritmo neperiano (en base e)

Ejercicios con la aplicación de la definición:

$\log_2 8 = 3$, -> pues $2^3 = 8$

$\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$ pues $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 2^4 = 16.$

Hallar la x:

a) $\log_2 x = 3 \Longrightarrow 2^3 = x \Longrightarrow \boxed{8 = x}$

b) $\log_2 32 = x \Longrightarrow 2^x = 32 \Longrightarrow 2^x = 2^5 \Longrightarrow 2^x = 2^5 \Longrightarrow \boxed{x = 5}$

Más difícil:

Problema 1:

$$\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(\sqrt[4]{3}\right) = x$$

$$3^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^x$$

$$3^{\frac{1}{4}} = 3^{-\frac{1}{2} * x}$$

$$\frac{1}{4} = -\frac{1}{2} * x$$

$$x = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Problema 2:

$$\log_x \sqrt[3]{7} = \frac{2}{3}$$

$$7^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{1}{3} \log_7 7 = \frac{2}{3} \log_7 x$$

$$\log_7 x = \frac{\log_7 7}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\log_7 x = \frac{1}{2}$$

$$x = \sqrt{7}$$

Propiedades de los logaritmos

logaritmo del producto: $\log_a b \cdot c = \log_a b + \log_a c$

logaritmo del cociente: $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

logaritmo de la potencia: $\log_a b^n = n \log_a b$

logaritmo de la raíz: $\log_a \sqrt[m]{b} = \frac{1}{m} \log_a b$

$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$

cambio de base: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

Las propiedades anteriores son muy importantes porque permiten a través de los logaritmos convertir productos y cocientes en sumas y restas.

Ejercicios con las propiedades de los logaritmos: (método)

a) Desarrollar expresiones:

Desarrollar la siguiente expresión en forma de sumas y restas de logaritmos:

$$\log_a \frac{\sqrt{3x-1}\,(x^2+3)}{(x-2)(2x+1)}$$

Solución: Utilizamos las propiedades anteriores de la siguiente manera:

$$\log_a \frac{\sqrt{3x-1}\,(x^2+3)}{(x-2)(2x+1)} =$$

->Pasamos el logaritmo del cociente a resta de logaritmos:

$$= \log_a \sqrt{3x+1}\,(x^2+3) - \log_a (x-2)(2x+1)$$

->Pasamos el logaritmo del producto a suma de logaritmos:

$$= \log_a \sqrt{3x-1} + \log_a (x^2-3) - [\log_a (x-2) + \log_a (2x+1)]$$

$$= \frac{1}{2}\log_a (3x-1) + \log_a (x^2+3) - \log_a (x-2) - \log_a (2x+1)$$

->logaritmo de la raíz

b) Ecuaciones logarítmicas: ejercicio: $\log 2 + \log (11-x^2) = 2 \log (5-x)$ método:

$\log 2 + \log (11 - x^2) = 2 \log (5 - x)$ → Agrupamos logs a cada lado con las propiedades

$\cancel{\log}\,[\,2 \cdot (11 - x^2)\,] = \cancel{\log}\,(5 - x)^2$ → Quitamos logs de cada lado y cogemos el interior

$2\cdot(11 - x^2) = (5 - x)^2$ → Quitamos los paréntesis y ordenamos

$3x^2 - 10x + 3 = 0$ → Utilizando: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x_1 = 3$ y $x_2 = 1/3$ → Resolvemos la ecuación de 2º grado

Hoja de ejercicios

1. Calcular los siguientes logaritmos aplicando la definición.

$a)\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{64} = x \rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^x = 2^{-6} \rightarrow 2^{x/2} = 2^{-6} \rightarrow \frac{x}{2} = -6 \rightarrow x = -12$

$b)\log_2 2\sqrt{2} =$ x=3/2

$c)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x = 3^3$ x = -6

2. Calcular el valor del número x.

$a)x^{-1} = 3 \rightarrow \frac{1}{x} = 3 \rightarrow 1 = 3x \rightarrow x = \frac{1}{3}$ $b)3^{1/4} = x$ $c)(2x)^{-2} = 4$ x=1/4

Calcular:

$a)\log_2 2^3.2^5 = \log_2 2^8 = 8\log_2 2 = 8$ 8

$b)\log_5 5^2.5^3 =$ 5

$c)\log_{1/5} 5^4 =$ -4

3. Sabiendo que log2= 0,30103 y que log3=0,47712 calcular los siguientes logaritmos:

$a)\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2}$ 1,58

$b)\log 5 = \log\frac{10}{2} =$ 0,6989

4. Sin utilizar la calculadora, resuelve los siguientes logaritmos:

$a)\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$

$b)\log_3 \frac{1}{81} = \log_3 3^{-4} =$

$c)\log_{1/3} 27 = \log_{1/3} 3^3 =$

5. Sin utilizar calculadora, halla el valor de:

$a)\log_5 50 - \log_5 2 =$ 2

$b)\log_3 3^5 - \log_3 3^4 =$ 1

$c)\log_2 24 - \log_2 6 =$ 2

6. Escribe las siguientes expresiones como el log de una sola expresión

$a)3\log a + 2\log b - \frac{3}{2}\log c + \frac{5}{2}\log d =$

$b)\frac{1}{2}\log\left(x^2+4\right) + \frac{1}{2}\log(x+3) + \frac{1}{2}\log(x-3) =$

7. Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

$a)\log x = \log 2 + \log(x-3) \rightarrow x = 2(x-3) \rightarrow x = 6$ 6

$b)\log(3x+1) - \log(2x-3) = 1 - \log 5$ 5

$c)\log(20x) + \log(2x) = 3 \rightarrow 20x.2x = 1000$ 25

$d)\log(x+2) + \log(10x+20) = 3$ 0

$e)\log x + \log 50 = 3$ 20

8. Simplifica las expresiones:

a) $\log A = 3\log x + 5\log y$ b) $\log B = 7\log x - \frac{1}{2}\log y - \log z$ c) $\log C = \frac{3}{2}\log a + \frac{5}{3}\log b - 3\left(\log c + \frac{1}{6}\log d\right)$

Soluc: a) $A = x^3 \cdot y^5$, b) $B = \frac{x^7}{z \cdot \sqrt{y}}$, c) $C = \frac{\sqrt{a^3}\sqrt[3]{b^5}}{c^3 \cdot \sqrt{d}}$.

9. Resolver las ecuaciones logarítmicas (pistas y soluciones al lado)

log x = 1 + log(33 – x) log x = log 10 – log (33-x) → x = 30

2 log x = 3 + log x/10 x^2 = 1000 · x/10 → x= 100

2 log x = log x/2 – 1 x^2 = x/20 → x=1/20

$3 \log (2a) - 3 \log (3a) - 2 \log (9a) = \log \frac{8}{243}$ log 3^{-1} = log a -> a = 1/3

$3\log x = \log\left(\frac{x^2}{2}\right) + 2$ log 2x = 2 -> 2x = 10^2 -> x=50

$\log x + \log 13 = \log 78$ log x = log 78 – log 13 -> x=6

$\log \frac{x^2}{x-16} = 2$ x^2 – 100x – 1600=0 -> x=80 y 20

$\frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)} = 3$ 35-x^3 = $(5-x)^3$ -> x= 3 y 2

log x – 3log 2 = log 3 – log(x+2) x^2+2x-24 =0 -> x=4 pero no -6 porque log (-6) no existe

5 log x/2 + 2 log x/3 = 3 log x – log 32/9 x^4 = 81 -> x=3

2log x – log (x-16) = 2 x^2 – 100x +1000 =0 → x= 80 y 20

log √(3x-1) – log √(2x – 3) = 1 – log 5 √(3x-1/2x-3)=10/5 -> x=13/5

($\log_2$(4x-3) + $\log_2$ 6) / $\log_2$ (5x+1) = 1 (4x-3)6 = (5x-1) → 24x -18 = 5x +1 → x=1

Sistemas:

x + y = 7
logx + log y =1 → log(x·y) = log 10 → **x · y = 10 ->** x = 7 – y → $y_1 = 5$ $y_2 = 2$

2x + y = 12
logx – log y = -1 x=1

x+y = 70
log x + log y = 3 x=50 y 20

2logx – log y = -1
5logx + log y = 6 $x=\sqrt[13]{10^9}$

Ecuaciones exponenciales:

$2^{x+1} - 2^{x-1} = 12$ 2^x = t → x = 3