Logaritmos

Definición:

Si: $\log_a b = x \longleftrightarrow a^x = b$

Importante aprender
(abre el grifo desde la base)

El logaritmo se convierte en una función exponencial.

- Ejemplo de multiplicación en forma exponencial: $a^{b1} \cdot a^{b2} = a^{b1+b2}$
- Ejemplo de multiplicación en forma logarítmica: $\log b_1 \cdot b_2 = \log b_1 + \log b_2$

Por lo tanto, el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores. De igual manera se demostraría que el logaritmo de un cociente es la resta de los logaritmos, etc… Así con los logaritmos las multiplicaciones se convierten en sumas, las divisiones en restas y la exponenciación en multiplicaciones. Esto facilita mucho las operaciones de grandes cantidades.

Nota: $\log x$ → es lo mismo que $\log_{10} x$ -> Llamado logaritmo *decimal* (en base 10)
$\ln x$ → es lo mismo que $\log_e x$ - > Llamado logaritmo *neperiano* (en base e)

Ejercicios con la definición de logaritmo:

Ejem.: $\log_2 8 = 3$ → pues $2^3 = 8$ - $\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$ pues $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 2^4 = 16$.

Hallar la x: *Ejercicios resueltos con la definición (no hay sumas ni restas).*

a) $\log_2 32 = x \Longrightarrow 2^x = 32 \Longrightarrow 2^x = 2^5 \Longrightarrow 2^x = 2^5 \Longrightarrow \boxed{x = 5}$

b) $\log_2 x = 3 \rightarrow 2^3 = x \rightarrow x = 8$

c) $\log_x 100 = 2 \rightarrow x^2 = 100 \rightarrow x = \sqrt{100} \rightarrow x = 10$

d) $\log_6 \frac{1}{36} = x \rightarrow 6^x = \frac{1}{6^2} \rightarrow 6^x = 6^{-2} \rightarrow x = -2$

e) $\log_3 \sqrt[4]{27} = x \rightarrow 3^x = 27^{\frac{1}{4}} \rightarrow 3^x = 3^{\frac{3}{4}} \rightarrow x = \frac{3}{4}$

Propiedades de los logaritmos

logaritmo del producto: $\log_a b \cdot c = \log_a b + \log_a c$	logaritmo de la potencia: $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$
logaritmo del cociente: $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$	logaritmo de la raíz: $\log_a \sqrt[m]{b} = \frac{1}{m} \log_a b$
especiales: $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$; $\log 0 = \nexists$	cambio de base: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

Las propiedades permiten, a través de los logaritmos, convertir productos y cocientes en sumas y restas.

Método para resolver ejercicios de propiedades:

a) Desarrollar expresiones:

Desarrollar la siguiente expresión en forma de sumas y restas de logaritmos:

$$\log_a \frac{\sqrt{3x-1}\left(x^2+3\right)}{(x-2)(2x+1)}$$

Solución: Utilizamos las propiedades anteriores de la siguiente manera:

$$\log_a \frac{\sqrt{3x-1}\left(x^2+3\right)}{(x-2)(2x+1)} =$$ ->Pasamos el logaritmo del cociente a resta de logaritmos:

$$= \log_a \sqrt{3x+1}\left(x^2+3\right) - \log_a (x-2)(2x+1)$$ ->Pasamos el logaritmo del producto a suma de logaritmos:

$$= \log_a \sqrt{3x-1} + \log_a \left(x^2-3\right) - \left[\log_a (x-2) + \log_a (2x+1)\right]$$ ->logaritmo de la raíz

$$= \frac{1}{2}\log_a (3x-1) + \log_a \left(x^2+3\right) - \log_a (x-2) - \log_a (2x+1)$$

b) Ecuaciones logarítmicas:

log x = 1 + log (x – 3)		_método_
log x = **log 10** + log (x – 3)	→	Intentamos tener logs en todos los términos
log x = log [10·(x-3)]	→	Agrupamos logs a cada lado con las propiedades
~~log~~ x = ~~log~~ [10·(x-3)]	→	tachamos logs de cada lado y cogemos el interior
x = 10(x - 3)	→	Quitamos los paréntesis
x = 10x – 30	→	Resolvemos la ecuación
x = 30/9 = 10/3		

log 2 + log (11-x^2) = 2 log (5-x)		_método_
log 2 + log (11 – x^2) = log $(5 – x)^2$	→	Agrupamos logs a cada lado con las propiedades
~~log~~ [2 · (11 – x^2)] = ~~log~~ $(5 – x)^2$	→	tachamos logs de cada lado y cogemos el interior
2·(11 – x^2) = $(5 – x)^2$	→	Quitamos los paréntesis y ordenamos
$3x^2 – 10x + 3 = 0$	→	Utilizando: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$x_1 = 3$ y $x_2 = 1/3$	→	Resolvemos la ecuación de 2º grado

<u>Hoja de ejercicios</u> - Intenta primero hacerlos sin mirar las pistas

1. Calcular los siguientes logaritmos aplicando la definición.

a) $\log 2x = 2$ Pista: $10^2 = 2x \rightarrow x = 50$

b) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{64} = x$ Pista: $\rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^x = 2^{-6} \rightarrow 2^{x/2} = 2^{-6} \rightarrow \frac{x}{2} = -6 \rightarrow x = -12$

c) $\log_2 2\sqrt{2} =$ Pista: $2^x = 2^{3/2} \rightarrow x=3/2$

3. Calcular:

$a) \log_2 2^3.2^5 = \log_2 2^8 = 8 \log_2 2 = 8$ 8

$b) \log_5 5^2.5^3 =$ $5\log_5 5 = 5$

$c) \log_{1/5} 5^4 =$ $5^{-x}=5^4 \rightarrow x=-4$

4. Resuelve los siguientes logaritmos (sin calculadora):

$a) \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$

$b) \log_3 \frac{1}{81} = \log_3 3^{-4} =$

$c) \log_{1/3} 27 = \log_{1/3} 3^3 =$

5. Calcula la expresión (sin calculadora):

$a) \log_5 50 - \log_5 2 =$ Pista: $\log_5 (50/2) = x \rightarrow 5^x = 25 \rightarrow 5^x = 5^2 \rightarrow x = 2$

$b) \log_3 3^5 - \log_3 3^4 =$ Pista: $\log_3 (3^5/3^4) = 1$

$c) \log_2 24 - \log_2 6 =$ Pista: $\log_2 (24/6) = 2$

6. Escribe las siguientes expresiones como el log de una sola expresión

$a) 3\log a + 2\log b - \frac{3}{2}\log c + \frac{5}{2}\log d =$ Pista: $\log a^3b^2 - \log \sqrt{c^2} + \log \sqrt{d^5}$

$b) \frac{1}{2}\log(x^2+4) + \frac{1}{2}\log(x+3) + \frac{1}{2}\log(x-3) =$

7. Simplifica las expresiones:

a) $\log A = 3\log x + 5\log y$ b) $\log B = 7\log x - \frac{1}{2}\log y - \log z$ c) $\log C = \frac{3}{2}\log a + \frac{5}{3}\log b - 3\left(\log c + \frac{1}{6}\log d\right)$

Soluc: a) $A = x^3 \cdot y^5$, b) $B = \frac{x^7}{z \cdot \sqrt{y}}$, c) $C = \frac{\sqrt{a^3}\sqrt[3]{b^5}}{c^3 \cdot \sqrt{d}}$.

8. Resolver las <u>ecuaciones logarítmicas</u>:

a) $\log x + \log 50 = 3$ 20

Pista: $\log (x \cdot 50) = \log 1000 \rightarrow 50x = 1000 \rightarrow x = 1000/50 \rightarrow x = 20$

b) $\log(20x) + \log(2x) = 3$

Pista: $\log (20x \cdot 2x) = \log (1000) \rightarrow 20x \cdot 2x = 1000 \rightarrow 40x = 1000 \rightarrow x = 25$ 25

c) $2\ln x + \ln 3 = 1$ Pista: $\ln x^2 + \ln 3 = \ln e \rightarrow 3x^2 = e \rightarrow x = \sqrt{(e/3)}$

d) ln 2x = 3 (por los dos métodos)

Por el método de la definición: $e^3 = 2x \rightarrow x = e^3/2$

Por cambio de base y propiedades: $\log 2x / \log e = 3 \rightarrow \log 2x = 3 \log e \rightarrow 2x = e^3 \rightarrow x = e^3/2$

9. Resolver las ecuaciones logarítmicas (pistas y soluciones al lado)

$\log x = 1 + \log(33 - x)$ — $\log x = \log 10 - \log(33-x) \rightarrow x = 30$

$2\log x = 3 + \log x/10$ — $x^2 = 1000 \cdot x/10 \rightarrow x = 100$

$2\log x = \log x/2 - 1$ — $x^2 = x/20 \rightarrow x = 1/20$

$2\log x - \log(x+6) = 3\log 2$ — $x = 12$

$3\log(2a) - 3\log(3a) - 2\log(9a) = \log\frac{8}{243}$ — $\log 3^{-1} = \log a \rightarrow a = 1/3$

$3\log x = \log\left(\frac{x^2}{2}\right) + 2$ — $\log 2x = 2 \rightarrow 2x = 10^2 \rightarrow x = 50$

$\log x + \log 13 = \log 78$ — $\log x = \log 78 - \log 13 \rightarrow x = 6$

$\log\frac{x^2}{x-16} = 2$ — $x^2 - 100x - 1600 = 0 \rightarrow x = 80$ y 20

$\frac{\log(35 - x^3)}{\log(5-x)} = 3$ — $35 - x^3 = (5-x)^3 \rightarrow x = 3$ y 2

$\log x - 3\log 2 = \log 3 - \log(x+2)$ — $x^2+2x-24 = 0 \rightarrow x = 4$ pero no -6 porque $\log(-6)$ no existe

$5\log x/2 + 2\log x/3 = 3\log x - \log 32/9$ — $x^4 = 81 \rightarrow x = 3$

$2\log x - \log(x-16) = 2$ — $x^2 - 100x + 1000 = 0 \rightarrow x = 80$ y 20

$\log\sqrt{(3x-1)} - \log\sqrt{(2x-3)} = 1 - \log 5$ — $\sqrt{(3x-1/2x-3)} = 10/5 \rightarrow x = 13/5$

$[\log_2(4x-3) + \log_2 6] \,/\, \log_2(5x+1) = 1$ — $(4x-3)6 = (5x-1) \rightarrow 24x - 18 = 5x + 1 \rightarrow x = 1$

$4\log_2(x^2+1) = \log_2 625$ — $(x^2+1)^4 = 625 \rightarrow x^2+1 = \sqrt[4]{625} \rightarrow x^2+1 = 5 \rightarrow x = \pm 2$

$2\ln(x-3) = \ln x - \ln 4$ — $(x-3)^2 = x/4$

10. Resolver las ecuaciones logarítmicas:

$b)\ \log(3x+1) - \log(2x-3) = 1 - \log 5$ — $\log(3x+1/2x-3) = \log(10/5) \rightarrow 3x+1 = 4x-6 \rightarrow x = 7$

$c)\ \log(20x) + \log(2x) = 3$ — $20x \cdot 2x = 1000 \rightarrow 40x^2 = 1000 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = 5$

$d)\ \log(x+2) + \log(10x+20) = 3$ — $(x+2)\cdot(10x+20) = 1000 \rightarrow x^2 + 4x - 96 = 0 \rightarrow x = 8\ ;\ x \neq -12$

Sistemas:

$x + y = 7$
$\log x + \log y = 1$ $\rightarrow \log(x\cdot y) = \log 10 \rightarrow x \cdot y = 10 \rightarrow$ $x = 7 - y \rightarrow y_1 = 5 \quad y_2 = 2$

$2x + y = 12$
$\log x - \log y = -1$ — $x = 1$

$x + y = 70$
$\log x + \log y = 3$ — $x = 50$ y 20

$2\log x - \log y = -1$
$5\log x + \log y = 6$ — $x = \sqrt[13]{10^9}$

Exponenciales

Ecuación exponencial: es aquella en la que la incógnita aparece como exponente.

Definición:

$$a^x = b \longleftrightarrow \log_a b = x$$

Es la inversa del logaritmo
(abre el grifo desde la base)

Métodos de resolución:

Tipo 1: Intentar que tengan la misma base e igualar los exponentes (regla del cacahuete)
Ejemplo 1: $\mathbf{2^x = 16} \rightarrow 2^x = 2^4 \rightarrow x = 4$
Ejemplo 2: $\mathbf{4^{2x+1} = 8^{2x}} \rightarrow (2^2)^{2x+1} = (2^3)^{2x} \rightarrow \mathbf{2x + 1 = 4x} \rightarrow \mathbf{x = 1/2}$

Tipo 2: Si no es una suma, añadir *log* a cada miembro para bajar los exponentes
Ejemplo: $\mathbf{2^{2x-1} = 3^x} \rightarrow log\ 2^{2x-1} = log\ 3^x \rightarrow (2x-1)\ log\ 2 = x \cdot log\ 3$

Tipo 3: Cuando suelen haber sumas o restas, mejor hacer cambio de variable tipo: ***a*** ^{x} ***= t***
Ejemplo: $\mathbf{9^x + 3^x = 6642} \rightarrow 3^{2x} + 3^x = 6642 \rightarrow t^2 + t - 6642 = 0$

Ejercicios: Resolver las ecuaciones exponenciales por el método más apropiado.

1. $3^x = 48$ *(Soluc: x≅3,5237)*
2. $2^x = \dfrac{8}{27}$ *(Soluc: x≅−1,7549)*
3. $2^{x+1} + 4 = 80$ *(Soluc: x≅5,2479)*
4. $2 \cdot 3^x - 3^{2x} + 3 = 0$ *(Soluc: x=1)*
5. $3^{x-1} + 3^{x+1} - 3^x = 63$ *(Soluc: x=3)*
6. $2^{2x-3} = 8^{x+1}$ *(Soluc: x=-6)*
7. $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$ *(Soluc: x=2)*
8. $2^{x-3} = -3$ *(Soluc: ∄ soluc.)*
9. $5^{x-1} = 2 + \dfrac{3}{5^{x-2}}$ *(Soluc: x=2)*
10. $2e^{x-4} = 3$ *(Soluc: x≅4,4055)*
11. $2 + e^{x-4} = 3$ *(Soluc: x=4)*
12. $100 \cdot 10^x = \sqrt[x]{1000^5}$ *(Soluc: x=3)*
13. $3^{x/2} = 768$ *(Soluc: x≅12,0949)*
14. $4^{x^2+2} = 2^{-2}$ *(∄ soluc.)*
15. $3^{2x+5} = 3^7$ *(x=1)*
16. $\dfrac{1}{e^x} = 27$ *(x≅-3,2958,*
17. $5^{x^2-5x+6} = 1$ *(x₁=2, x₂=3)*
18. $3^x \cdot (3^2)^x = 9^3$ *(x=2)*
19. $e^{2x} - 2e^{x+1} + e^2 = 0$ *(x=1)*
20. $2^x - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$ *(x≅0,8301)*
21. $2^{x+2} + 2^{x+3} + 2^{x+4} + 2^{x+5} + 2^{x+6} = 31$ *(x=−2)*
22. $e^{4x} - 5e^{3x} + 5e^{2x} + 5e^x - 6 = 0$
    (Soluc: x_1=0, x_2=ln2; x_3=ln3)
23. $2^{x+1} = 4^{2x-4}$ *(Soluc: x=3)*
24. $e^{x-1} = 0$ *(Soluc: ∄ soluc.)*
25. $x^2e^x - 5xe^x + 6e^x = 0$ *(Sol: x_1=2, x_2=3)*
26. $3^{2x} \cdot 2^{3x-1} = 6^{x+1}$ *(Soluc: x=1)*
27. $e^{4x-x^2} = e^3$ *x_1=1, x_2=3*
28. $2^{x-3} = 3^{x+1}$ *x≅−7,8380*
29. $2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$ *x_1=1, x_2=2*
30. $3^{2x-4} = 729$ *x=5*
31. $e^{x-9} = \sqrt{73}$ *x≅11,1452*
32. $2^{x+9} = 3^x$ *x≅15,38*
33. $2^{1-x^2} = \dfrac{1}{8}$ *x=±2*
34. $10^{3-x} = 1$ *x=3*