Combinatòria

- Les **variacions**, **Vn, m**, compten els diferents grups de m elements que es poden formar amb els n elements d'un conjunt (m < n), sempre que els elements no es puguin repetir i hi influeixi l'ordre en què els col·loquem.

$$V_{n,\,m} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

- Les **Permutacions** son els diferents variacions que es poden formar entre tots ells: P5 = 5! = 5·4·3·2·1
- Les **variacions amb repetició** de n elements, agafats de m en m, **VRn, m**, són variacions en les quals els elements es poden repetir.

$$VR_{n,\,m} = n^m$$

- Les **combinacions** de n elements, agafats de m en m, **Cn, m**, s'utilitzen per comptar el nombre de grups diferents, en els quals <u>no importa l'ordre</u>, que es poden formar amb m elements diferents, escollits d'un conjunt de n elements.
  Combinacions = Variacions / Permutacions: C m n = V m n / P n

$$C_{n,\,m}\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$$

Taula per distingir cada tipus:

Hi influeix l'ordre?	No	Combinacions				
	Sí	Treballem amb tots els elements?	Sí	Permutacions		
			No	Podem repetir els elements?	Sí	Variacions amb repetició
					No	Variacions

Calcula.

a) Quants nombres de tres xifres diferents podem formar amb els dígits imparells?
b) I si podem repetir les xifres?

a) Tenim n = 4 elements i els col·loquem en grups de m = 3 elements. Hi influeix l'ordre i les xifres han de ser diferents. V4, 3 = = 4 × 3 × 2 × 1 = 24 nombres

b) Tenim n = 4 elements i els col·loquem en grups de m = 3 elements. Hi influeix l'ordre i podem repetir les xifres. VR4, 3 = 4^2 = 64 nombres

c) De quantes maneres diferents es poden asseure vuit persones en una filera de butaques de cinema?

En les diferents maneres de col·locar-se importa l'ordre. I com que dues persones no s'asseuen a la mateixa
butaca, no hi ha elements repetits. A més, tenim 8 elements i els ordenem.
P8 = 8! = 8 × 7 × 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 40.320 maneres

d) Quants punts d'intersecció produeixen set rectes coplanàries si sabem que no hi ha dues rectes paral·leles ni més de tres rectes que es tallin en el mateix punt?

Tenim n = 7 elements i els col·loquem en grups de m = 2 elements. No importa l'ordre, i el punt d'intersecció de les rectes r i s és el mateix que el de les rectes s i r. Sol: Cn, m = 21 punts

e) Troba quantes paraules de tres lletres diferents, tinguin sentit o no, es poden formar amb les lletres de la paraula CAMINO si totes han de començar per c i no poden contenir la lletra o.

Hi influeix l'ordre? Sí. Treballem amb tots els elements? No. Podem repetir els elements? No.
Són variacions, ja que totes les paraules han de començar per c i no poden incloure la lletra o;
són n = 4 elements, agafats en grups de m = 3. V4, 3 = 4 × 3 × 2 = 24 paraules

Probabilitat

- Un **experiment determinista** és aquell experiment en el qual podem predir el resultat
- Un **experiment aleatori** és aquell en el qual el resultat **no es pot predir**,
- **L'espai mostral** és el conjunt format per tots els resultats possibles d'un experiment aleatori. El representem E.
- **Esdeveniment** elemental: Cadascun dels resultats possibles.
- Un esdeveniment pot estar format per un o per diversos esdeveniments elementals.
- L'esdeveniment **segur** conté tots els resultats possibles (esdeveniments elementals).
- L'esdeveniment **impossible** no conté cap esdeveniment elemental. No es verifica mai.

Experiment	Espai mostral	Esdeveniments elementals
Llancem una moneda a l'aire	$E =$ {cara, creu}	cara (c) i creu (x)
Tirem un dau de parxís	$E =$ {1, 2, 3, 4, 5 i 6}	1, 2, 3, 4, 5 i 6
	↑ Tots els resultats possibles	↑ Cadascun dels resultats possibles

Operació entre esdeveniments: ens permet obtenir un altre esdeveniment del mateix espai mostral.

- **Unió** d'esdeveniments: la unió de dos esdeveniments A i B està formada pels elements (esdeveniments elementals) que es troben en qualsevol dels esdeveniments A o B: A U B = A unió B
- **Intersecció** de dos esdeveniments: la intersecció de dos esdeveniments A i B està formada pels elements (esdeveniments elementals) comuns als esdeveniments A i B: A ∩ B = A intersecció B
- **Incompatibles**: Quan dos esdeveniments no tenen cap esdeveniment elemental en comú.
- La **freqüència absoluta** (fi) d'un esdeveniment és el nombre de vegades que apareix aquest esdeveniment quan es repeteix un experiment aleatori n vegades.
- La **freqüència relativa** (hi) d'un esdeveniment és el quocient entre la seva freqüència absoluta i el nombre de vegades que s'ha repetit l'experiment:

Exercici:

En l'experiment que consisteix a llançar un dau, considera aquests esdeveniments:

A = obtenir un nombre més petit o igual que 5 = {1, 2, 3, 4, 5}

B = obtenir un nombre parell = {2, 4, 6}

a) Escriu l'esdeveniment d'unió, format per tots els esdeveniments elementals de A i B.

A U B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

b) Escriu l'esdeveniment d'intersecció, format per tots els esdeveniments comuns de A i B.

A ∩ B = {2, 4}

c) Escriu l'esdeveniment contrari de A, format per tots els esdeveniments elementals de l'espai mostral que no són a A. $\underline{A}$ = {6}

d) Escriu l'esdeveniment contrari de B, format per tots els esdeveniments de l'espai mostral que no són a B. $\underline{B}$= {1, 3, 5} Fixa't que la unió d'un esdeveniment i el seu contrari sempre és l'espai mostral.

REGLA DE LAPLACE

Quan tots els esdeveniments elementals d'un experiment aleatori són **equiprobables**, la probabilitat d'un esdeveniment A és el quocient entre el nombre de casos favorables a l'esdeveniment i el nombre de casos possibles. Aquesta expressió és la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\text{nombre de casos favorables}}{\text{nombre de casos possibles}}$$

Les **propietats** d'aquesta regla són:

a) La probabilitat d'un esdeveniment és un nombre comprès entre 0 i 1.

b) La probabilitat d'un esdeveniment impossible és 0. La probabilitat de l'esdeveniment segur és 1.

c) La suma de les probabilitats d'un esdeveniment A i el seu contrari Aw és igual a 1: P (A) + P ($\underline{A}$) = 1

d) La suma de les probabilitats de tots els esdeveniments elementals associats a un experiment aleatori és 1.

Per exemple, quan llancem un dau, E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}:

P (1) = P (2) = P (3) = P (4) = P (5) = P (6) = 1/6

P (1) + P (2) + P (3) + P (4) + P (5) + P (6) = 1

e) Donats dos esdeveniments A i B de l'espai mostral E:

- Si són **incompatibles**: P (A U B) = P (A) + P (B)
- Si són **compatibles**: P (A U B) = P (A) + P (B) − P (A ∩B)

Exercici:

En una capsa hi ha 3 boles roses, 2 boles blanques i 4 boles anyils. Si agafem una bola, troba:

a) La probabilitat que sigui rosa. Sol: 3/10= 0,3

b) La probabilitat que no sigui blanca. Sol: 1- P(B) = 1 – 2/10 = 0,8

c) La probabilitat que sigui rosa o anyil. Sol: P(R) + P(A) = 3/10 + 4/10 = 0,7

d) La probabilitat que sigui anyil o blanca. Sol: P(B) + P(A) = 2/10 + 4/10 = 0,6

EXPERIMENTS COMPOSTOS

La probabilitat d'un experiment compost la calculem a partir de les probabilitats dels esdeveniments simples que el formen.

Quina és la probabilitat que surtin dos nombres 6 quan tirem dos daus de parxís?

Una manera de resoldre el problema és aplicar directament la regla de Laplace: de les 36 combinacions possibles que es poden donar quan tirem dos daus, tan sols és favorable l'esdeveniment

$$P(6, 6)= P(6) \cdot P(6) = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$$

Una altra manera de resoldre els problemes de probabilitats compostes és construir el diagrama d'arbre.

Exercici:

En una classe hi ha 18 nois i 22 noies, i seleccionem a l'atzar dos alumnes.

a) La probabilitat que siguin dos nois.

b) La probabilitat que siguin dues noies.

c) La probabilitat que siguin un noi i una noia.

PROBABILITAT CONDICIONADA

- Un esdeveniment B està condicionat per un altre esdeveniment A, i l'expressem A/B quan sabem que ha tingut lloc l'esdeveniment A.
- La probabilitat que tingui lloc A ∩ B és igual a la probabilitat que passi l'esdeveniment A, multiplicada per la probabilitat que tingui lloc l'esdeveniment B condicionat a A.

  P (A ∩B) = P (A) × P (B/A)
- Dos esdeveniments A i B són **independents** si la realització de A no condiciona la probabilitat de B:

  P (A ∩ B) = P (A) × P (B/A) = P (A) × P (B)
- Dos esdeveniments A i B són **dependents** si la realització de A condiciona la probabilitat de B:

  P (A ∩ B) = P (A) × P (B/A)

Taula de contingencia: Una altra manera de resoldre els problemes de probabilitat d'esdeveniments simples i compostos és a partir d'una taula de contingència.