Teoría: Forma de mostrar un polinomio:

- Forma polinómica: $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ → sumando o restando términos
- Forma factorizada: $P(x) = (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)$ → multiplicándose por parejas

Para pasar de forma factorizada a polinómica:

Multiplicando los factores: $(x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)$:

$(x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)$

$$\begin{array}{r} x+1 \\ x+2 \\ \hline 2x+2 \\ x^2+1x \\ \hline x^2+3x+2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x^2+3x+2 \\ x+3 \\ \hline 3x^2+9x+6 \\ x^3+3x^2+2x \\ \hline x^3+6x^2+11x+6 \end{array}$$

Obtenemos: $\boxed{P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$

Para pasar de forma polinómica a factorizada:

1º: Intentar sacar algún factor común o ver si es el resultado de una expresión notable.

2º: Ir ***dividiendo*** por ***x ± algo*** utilizando la regla de Ruffini

Ir probando ese ***algo*** para que la división sea exacta, es decir, el resto sea 0. Para ello sabemos que tiene que ser múltiplo del último número.

$1x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ ⇨ $1x^3 + 6x^2 + 11x + 6 : (x+2)$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 6 & 11 & 6 \\ & & + & + & + \\ -2 & & -2 & -8 & -6 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \underline{|0} \\ & & + & + & \\ -3 & & -3 & -3 & \\ \hline & 1 & 1 & \underline{|0} & \end{array}$$

⇨ $1x^2 + 4x + 3 : (x+3)$

⇨ $1x + 1$

$P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+2) \cdot (x+3) \cdot (x+1)$

Para simplificar fracciones algebraicas:

1º. Sacar factor común si es posible antes.

2º. Factorizar numerador y denominador.

3º. Tachar los factores iguales arriba y abajo:

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}{(x+2)^2} = \frac{\cancel{(x+2)} \cdot (x+3) \cdot (x+1)}{\cancel{(x+2)} \cdot (x+2)}$$

Soluciones (o raíces) de una ecuación de grado superior a 2:

Para resolver ecuaciones de 3er grado y superiores, pasarlas a forma factorizada. Al igualar esta a cero, cada pareja factorial también puede ser cero por lo que se descompone en varias mini-ecuaciones de primer grado.

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(x+2)\cdot(x+3)\cdot(x+1) = 0$$

$$x+1=0 \rightarrow \boxed{x_1 = -1}$$

$$x+2=0 \rightarrow \boxed{x_2 = -2}$$

$$x+3=0 \rightarrow \boxed{x_3 = -3}$$

Teorema del resto:

En vez de sustituir la x en el polinomio para ver cuanto vale, lo divides por Ruffini por ese numero y el resto es el resutado. Es útli cuando el polinomio tiene potencias altas.

- Valor del polinomio por el método tradicional:

  $P(X) = X^4 - 3X^2 + 2 \rightarrow P(3) = 3^4 + 3\cdot3^2 + 2 = \boxed{56}$ ← Valor del polinomo

- Valor del polinomio por el método del teorema del resto:

$$P(X) = X^4 - 3X^2 + 2 = 1\,x^4 + 0\cdot x^3 - 3\cdot X^2 + 0\cdot x + 2$$

	1	0	-3	0	2
		+	+	+	+
3		3	9	18	54
P (3) =	1	3	6	18	$\boxed{56}$

← Valor del polinomo

Repaso de expresiones frecuentes (fórmulas notables):

- $(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2\cdot a\cdot b + b^2$ → Desarrollo del cuadrado de un binomio
- $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$ → Suma por diferencia de binomios o por su conjugado

Ejemplos: $(x+3)^2 = (a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2) = x^2 + 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

$(x + 3)\cdot(x - 3) = (a^2 - b^2) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$

Ejercicios: *(soluciones siguiente página)*

1. Calcula el valor del polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 6$ para $x=3$ mediante dos métodos:

a) Sustituyendo el valor en el polinomio b) Por el teorema del resto

2. Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a. $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$
b. $2x^3 - x^2 - 4 = 0$
c. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$
d. $x^4 - x^3 - 16x^2 - 20x = 0$

3. Determina las raíces de las siguientes ecuaciones de 3er grado:

a) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ b) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ c) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$
d) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ e) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$ f) $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$
g) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$ h) $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$ i) $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$

4. Determina las raíces de las siguientes ecuaciones de 4º grado:

a) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ b) $x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$
c) $x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4 = 0$ d) $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4 = 0$
e) $x^4 + 9x^3 + 30x^2 + 44x + 24 = 0$ f) $x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 20x - 24 = 0$
g) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ h) $x^4 - x^3 - 11x^2 + 5x + 30 = 0$
i) $2x^4 + 3x^3 - x = 0$ j) $3x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 8x + 4 = 0$

5. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x$ b) $P(x) = 3x^3 + 3x^2 - 18x$
c) $P(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24$ d) $P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$
e) $P(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 3x^2$ f) $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 12x$
g) $P(x) = 3x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 6x + 3$ h) $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$
i) $P(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4$ j) $P(x) = 4x^4 - 6x^3 + 2x^2$

6. Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los polinomios P(x) y Q(x):

a) $P(x) = x^2 + 2x + 1$ y $Q(x) = 3x + 3$ b) $P(x) = x^3 - 2x^2$ y $Q(x) = x^3 - 4x$

7.- Simplifica las fracciones polinómicas: a) $\dfrac{x^4 - 10x^2 + 9}{(x^2 - 3^2)}$ b) $\dfrac{x^2 - 1}{x^4 - 1}$

8. Desarrolla las siguientes expresiones notables:

a) $(x-4)^2$ b) $(x^2-3)^2$ c) $(2-5x)\cdot(2+5x)$

Hoja de soluciones:

1.- $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 6$ → a: $P(2) = 2^4 - 2\cdot2^3 + 3\cdot2 - 6 = 81 - 2\cdot27 + 9 - 6 = 30$

b:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -2 & 0 & 3 & -6 \\ 3 & & 3 & 3 & 9 & 36 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & 12 & \boxed{30} \end{array}$$

2.- Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a. $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$ → (x-2)(x-2)(x-1)(x-1) → R: -2 y -1
b. $2x^3 - x^2 - 4 = 0$ → R: 2
c. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$ → R: 2, -3
d. $x^4 - x^3 - 16x^2 - 20x = 0$ → 1º Sacar factor común a la x: → $x \cdot (x^3 - x^2 - 16x - 20) = 0$
2º Hacer el Ruffini de: 1 -1 16 -20 → R: 0, 5, -2, -2

3. Determina las raíces de las siguientes ecuaciones de 3er grado:

a) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ b) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ c) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$
d) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ e) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$ f) $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$
g) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$ h) $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$ i) $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$

Sol: a) x = r1, x = 2; b) x = r1, x = 3; c) x = 1 (doble), x = 3;
d) x = 1 (doble), x = 2; e) x = 1, x = 2 (doble); f) x = –2, x = 2 (doble);
g) x = 2, x = –2 (doble); h) x = –1, x = –2 (doble); i) x = 2, x = –1, x = –4;

4. Determina las raíces de las siguientes ecuaciones de 4º grado:

a) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ b) $x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$
c) $x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4 = 0$ d) $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4 = 0$
e) $x^4 + 9x^3 + 30x^2 + 44x + 24 = 0$ f) $x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 20x - 24 = 0$
g) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ h) $x^4 - x^3 - 11x^2 + 5x + 30 = 0$
i) $2x^4 + 3x^3 - x = 0$ j) $3x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 8x + 4 = 0$

Sol: a) x = 1 (doble), x = –1 (doble); b) x = –2, x = –1, x = 1 (doble);
c) x = 2 (doble), x = r1; d) x = –1 (doble), x = –2 (doble); e) x = –3, x = –2 (triple);
f) x = –2 (doble), x = 2, x = –3; g) x = r1, x = –3, x = 2; h) x = 3, x = –2, x r 5 ;
i) x = –1 (doble), x = 1/2, x = 0; j) x = 1, x = –1/3, x = r2;

5. Factorice los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x$ b) $P(x) = 3x^3 + 3x^2 - 18x$
c) $P(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24$ d) $P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$
e) $P(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 3x^2$ f) $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 12x$
g) $P(x) = 3x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 6x + 3$ h) $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$
i) $P(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4$ j) $P(x) = 4x^4 - 6x^3 + 2x^2$

Sol: a) $(x - 1)^2\cdot(x + 1)\cdot x$; b) $(x + 3)\cdot(x - 2)\cdot 3x$; c) $(x - 1)\cdot(x + 4)\cdot(x - 2)\cdot(x - 3)$;
d) $(x^2 + 1)\cdot(x - 2)\cdot(x - 1)$; e) $x^2\cdot(x - 1)2\cdot(x - 3)$; f) $(x + 2)\cdot(x - 3)\cdot 2x$; g) $3\cdot(x + 1)^2\cdot(x^2 + 1)$;
h) $(x - 2)\cdot(x - 1)\cdot(x + 1)\cdot(x + 3)$; i) $(x + 1)\cdot(x + 2)\cdot(x^2 + 2)$; j) $2x^2\cdot(x - 1)\cdot(2x - 1)$.

6. Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo en cada caso:

a) $P(x) = x^2 + 2x + 1$ y $Q(x) = 3x + 3$ b) $P(x) = x^3 - 2x^2$ y $Q(x) = x^3 - 4x$

Sol: a) mcm: $3\cdot(x + 1)^2$; mcd.:$(x + 1)$; b) mcm: $x^2\cdot(x - 4)\cdot(x + 4)$; mcd:$(x - 2)\cdot x$.

7.- Simplificar fracciones polinómicas:

a) $\dfrac{x^4 - 10\,x^2 + 9}{(x^2 - 3^2)}$

	1	0	- 10	0	9
3		3	9	-3	-9
	1	3	-1	-3	0
-1		-1	-2	3	
	1	2	-3	0	
+1		1	3		
	1	3	0		
[illegible]		[illegible]			
	1	0			

$$\frac{(x-3)\cdot(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+3)}{(x+3)\cdot(x-3)} = (x+1)\cdot(x-1) = x^2 - 1$$

b) $\dfrac{x^2-1}{x^4-1} = \dfrac{1}{x^2+1}$

8. Desarrolla las siguientes expresiones notables:

a) $(x-4)^2 = (a^2 -2\cdot a\cdot b + b^2) = x^2 - 2\cdot x\cdot 4 + 4^2 = x^2-8x +16$

b) $(x^2-3)^2 = (a^2 -2\cdot a\cdot b + b^2) = (x^2)^2 - 2\cdot x^2\cdot 3 + 3^3 = x^4 -6x^2 +9$

c) $(2-5x)\cdot(2+5x) = (a^2 - b^2) = 2^2 - (5x)^2 = 4 - 25\,x^2$