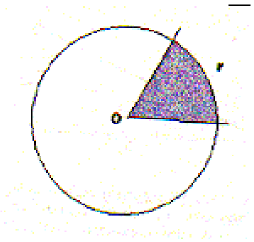
TRIGONOMETRÍA

Sistema circular:

Se llama **radián** al ángulo que teniendo su vértice en el centro de un círculo corta en su circunferencia un arco de longitud igual al radio. Dado que una circunferencia completa tiene 360º y su longitud total es $2\pi r$,

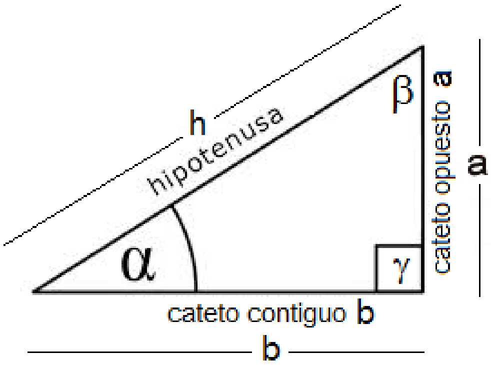


en la circunferencia caben $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ **radianes**.

Si queremos saber la equivalencia entre la medida de un ángulo α en grados y en radianes bastará establecer la siguiente proporcionalidad directa:

$$\frac{360}{2\pi} = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow x = \frac{2\pi\alpha}{360} = \frac{\pi\alpha}{180} \quad \textit{radianes}$$

Razones Trigonométricas En Un Triángulo Rectángulo.



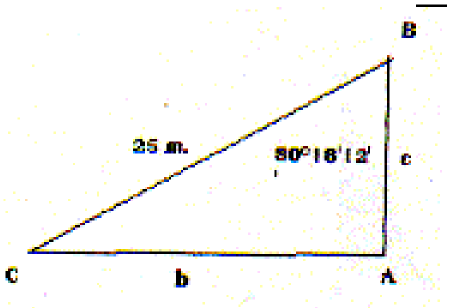
Relación entre ángulos: $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 180^{o} \\ \alpha + \beta = 90^{o} \end{cases}$

Relación entre lados: $h^2 = a^2 + b^2$

Relación entra angulos y lados: $\begin{cases} \operatorname{sen} \alpha = \dfrac{a}{h} \\ \cos \alpha = \dfrac{b}{h} \\ \tan \alpha = \dfrac{a}{b} \end{cases}$

Resolución de triángulos rectángulos.

Resuelve el siguiente triángulo rectángulo:



Como ya sabemos que A=90º, hemos de determinar C, c y b.

C=90º - 80º 18' 12'' = 9º 41' 48''

De la definición de seno: $\operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \operatorname{sen} B = $
$= 25 \cdot 0{,}9857 = 24{,}6 \quad m.$

De la definición de coseno: $\cos B = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \cos B =$
$= 25 \cdot 0{,}1684 = 4{,}2 \quad m.$

<u>Resuelve un triángulo como el anterior sabiendo que b = 18 cm. y c= 23 cm.</u>

Por el Teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{18^2 + 23^2} = \sqrt{324 + 529} = \sqrt{853} = 29{,}2 \quad cm.$

De la definición de tangente, tenemos que: $\operatorname{tg} B = \frac{b}{c} = \frac{18}{23} = 0{,}7826 \Rightarrow B = 38º2'48''$

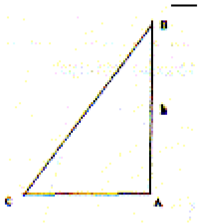
Finalmente queda para C: $C = 90º – 38º2'48'' = 51º57'12''$

Aplicaciones de la Trigonometría a la resolución de problemas de la vida diaria.

Veremos en este apartado un caso de uso bastante frecuente:

a) a) Determinación de la altura de un punto de pie accesible:

Sea la torre de altura h (que queremos determinar) pero a cuyo pie puede llegarse. Elegimos en el suelo un punto C tal que AC=b sea horizontal y medimos AC. Con el **teodolito** (aparato destinado a medir ángulos dirigiendo una visual a dos puntos) determinamos el ángulo C. Con todo esto el triángulo CAB es rectángulo y podemos poner:



$$\mathrm{tg}C = \frac{h}{AC} \Rightarrow h = AC\,\mathrm{tg}C$$

en la que conocemos los datos necesarios.

Relación Fundamental de la trigonometría:

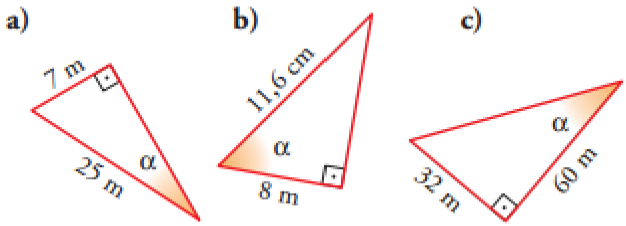
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad ; \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$$

Si sabem que $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, calcula el sinus i la tangent d'aquest angle.

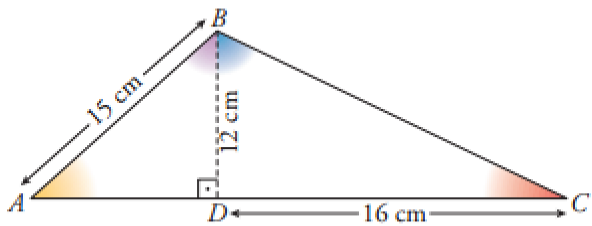
$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$$

<u>Ejercicios:</u>

1.- Halla las razones trigonométricas del ángulo a en cada uno de estos triángulos: Ra: sen α=0,28 cos α= 0,96 tanα =0,29



2.- Calcula las razones trigonométricas de los ángulos:

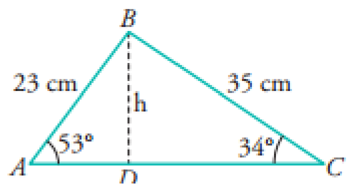


3.- Cuando los rayos del sol forman 40° con el suelo, la sombra de un árbol mide 18 m. ¿Cuál es su altura? (R:15,1)

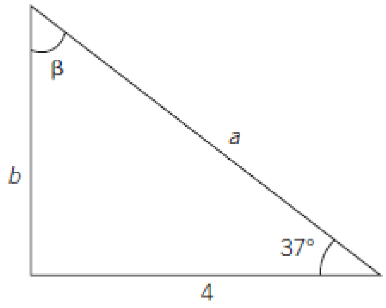
4.- Una escalera de 3 m está apoyada en una pared. ¿Qué ángulo forma la escalera con el suelo si su base está a 1,2 m de la pared? R: 66° 25' 19''

5.- De un triángulo isósceles conocemos su lado desigual, 18 m, y su altura, 10 m. ¿Cuánto miden sus ángulos? a = 48° 46'' y 83° 58'

6.- Halla: a) La longitud AC. b) El área del triángulo ABC
R: 42,84 cm ≈ 393,49 cm2



Calcula quant fan els costats *a* i *b*, i l'angle β del triangle de la figura.



Com que els tres angles d'un triangle sumen 180°, tenim que:

$$180° = 90° + 37° + \beta \rightarrow \beta = 180° - 127° = 53°$$

Per calcular l'altre catet, *b*, apliquem la definició de *tg* 37° i fem servir la calculadora per trobar *tg* 37°:

$$tg\,37° = \frac{b}{4} \rightarrow b = 4 \cdot 0{,}75 = 3$$

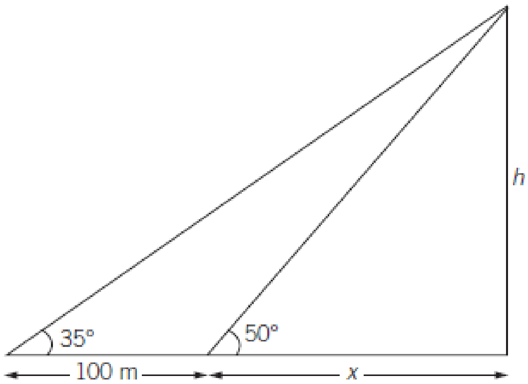
Per trobar la hipotenusa *a* poden utilitzar tres mètodes:

1r Aplicar el teorema de Pitàgores.
2n Utilitzar la definició de *sin* 37°.
3r Fer servir la definició de *cos* 37°.

Utilitzarem el segon mètode:

$$sin\,37° = \frac{3}{a} \rightarrow a = \frac{3}{0{,}6} = 5$$

Des d'un punt veiem l'extrem superior del campanar de l'església sota un angle de 50°. Si ens n'allunyem 100 m, el veiem sota un angle de 35°. Troba l'altura del campanar i la distància a la qual ens trobem inicialment.



Aquest tipus de problemes es resolen per mitjà de les tangents dels dos angles:

$$tg\,50° = \frac{h}{x} \rightarrow h = 1{,}192x$$

$$tg\,35° = \frac{h}{100 + x} \rightarrow h = 0{,}7(100 + x)$$

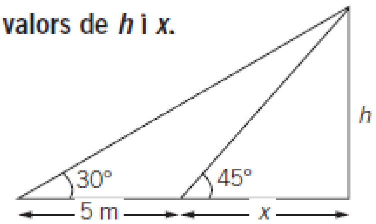
Si les igualem totes dues, resulta:

$$1{,}192\,x = 0{,}7(100 + x) = 70 + 0{,}7x \rightarrow 0{,}492x = 70 \rightarrow x = 142{,}3 \text{ m}$$

Substituïm en la primera equació i tenim que l'altura del campanar és de:

$$h = 1{,}192x = 1{,}192 \cdot 142{,}3 = 169{,}6 \text{ m}$$

Troba els valors de *h* i *x*.



Determina l'altura de l'arbre que, vist des de dues posicions que disten entre si 30 m, forma la figura següent: