Leyes de Kepler:

1ª: Ley de las órbitas:

Los planetas giran alrededor del sol formando órbitas elípticas y el Sol en está en un foco.

2ª: Ley de las áreas:

Las áreas barridas son proporcionales a los tiempos empleados.

3ª Ley de los períodos:

Los cuadrados de los periodos son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores: $\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3}$

- ***Ley de la Gravitación Universal:*** $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ *Forma vectorial:* $\vec{F} = -G\frac{m_1\, m_2}{r^2}\overrightarrow{u_r}$
- ***Intensidad de campo gravitatorio g:*** $\boldsymbol{g = G\frac{M}{r^2}}$ $\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\hat{u}$
- ***Intensidad de campo en función de la altura:*** $\boldsymbol{\frac{g}{go} = \frac{r}{ro}}$
- ***Energía potencial gravitatoria Ep:*** $Ep = -G\frac{M_1 m_2}{r}$ ***Ep terrestre:*** $Ep = -G\frac{M_T m}{(R_T + h)}$
- ***Potencial gravitatorio V:*** $Ep = -G\frac{M_1 m_2}{r} \xrightarrow{si\ m_2=1\,kg} V = -G\frac{M_1}{r}$
- ***Trabajo $W_{A\text{-}B}$:*** $\boldsymbol{W = -\Delta Ep = Ep_B - Ep_A}$ **;** $\boldsymbol{W = \int_A^B F \cdot dr}$
- ***Diferencia de potencial:*** $\boldsymbol{Vb - Va = \frac{Ep_a - Ep_b}{m}}$
- ***Velocidad de escape:*** $Ec_1 + Ep_1 = 0$ $\frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{M_T m}{R_T} = 0$ $v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2g_o R_T}$
- ***Energía mecánica de satélite en órbita:***

$$Em = Ec + Ep \qquad Em = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{R_T + h} \qquad Em = \frac{1}{2}m\,G\frac{M_T}{R_T + h} - G\frac{M_T m}{R_T + h}$$

Ejercicios:

. En el movimiento circular de un satélite en torno a la Tierra, determina:

a) La expresión de la energía cinética en función de las masas del satélite, de la Tierra y del radio de la órbita.

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{G M m}{R_0}$$

b) La relación que existe entre su energía mecánica y su energía potencial.

$$E_m = E_c + E_p = -\frac{1}{2} \frac{G M m}{R_0} = \frac{1}{2} E_p$$

Un satélite artificial gira en torno a la Tierra describiendo una órbita de 7 000 km de radio. Calcula la velocidad y el periodo de revolución del satélite suponiendo que la masa de la Tierra es $M_T = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg.

$$m \frac{v^2}{R} = G \frac{M m}{R^2} \qquad v = \sqrt{\frac{G M}{R}} = 7{,}6 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

$$T = \frac{2 \pi R}{v} = 5\,784 \text{ s} = 1{,}6 \text{ h}$$

El satélite *Meteosat* nos envía tres veces al día imágenes de Europa para la confección de los mapas del tiempo. Calcula:

a) Su periodo de revolución.

b) El radio de la órbita que describe.

Del enunciado se deduce que el periodo es la tercera parte de un día.

a) $T = \frac{1}{3} \cdot 24 \text{ h} = 8 \text{ h}$

b) $v = \sqrt{\frac{G M}{R}} \qquad T = \frac{2 \pi R}{v}$

$$R = \sqrt[3]{\frac{T^2 G M}{4 \pi^2}} = 2{,}0 \cdot 10^7 \text{ m}$$

. La nave espacial *Apolo VIII* estuvo en órbita circular alrededor de la Luna 113 km por encima de su superficie.

Calcula:

a) El periodo de movimiento.

b) Las velocidades lineal y angular de la nave.

c) La velocidad de escape a la atracción lunar desde esa posición.

Datos: Constante de Gravitación $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg². Masa de la Luna, $M_L = 7{,}36 \cdot 10^{22}$ kg; Radio de la Luna, $R_L = 1\,740$ km.

a) y *b)* $v = \sqrt{\frac{G M_L}{R_L + h}} = 1\,630 \text{ m/s}$

$$\omega = \frac{v}{R_L + h} = \frac{1{,}627 \cdot 10^3 \text{ m/s}}{1{,}853 \cdot 10^3 \text{ m}} = 8{,}8 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

$$T = \frac{2 \pi \,(R + h)}{v} = 7\,219 \text{ s}$$

Calcula el trabajo necesario para trasladar un satélite terrestre de 500 kg desde una órbita circular de radio $r_0 = 2 R_T$ hasta otra de radio $r_1 = 3 R_T$. Datos: $R_T = 6{,}4 \cdot 10^6$ m; $g_0 = 9{,}8$ m/s².

$$E_1 = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M m}{2 R} = -\frac{R}{4} m g \qquad E_2 = -\frac{G M m}{6 R} = -\frac{R}{6} m g$$

$$E_2 - E_1 = R m g \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12} R m g = 2{,}6 \cdot 10^9 \text{ J}$$

El periodo de revolución de Júpiter en su órbita alrededor del Sol es aproximadamente 12 veces mayor que el de la Tierra en su respectiva órbita. Considerando circulares las órbitas de los dos planetas, determina:

a) La razón entre los radios de las respectivas órbitas.

b) La razón entre las aceleraciones de los dos planetas en sus órbitas.

a) $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \sqrt[3]{\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2} = \sqrt[3]{12^2} = 5{,}2;$

b) $m\,\frac{v^2}{R} = G\,\frac{M\,m}{R^2}$

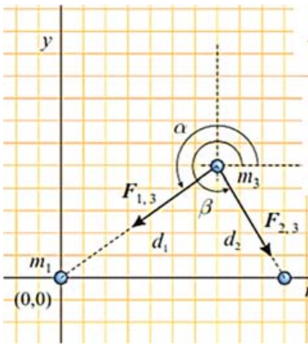
$$a_1 = \frac{v_1^2}{R_1} = \frac{G M_s}{R_1^2}; \qquad a_2 = \frac{v_2^2}{R_2} = \frac{G M_s}{R_2^2}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{R_2^2}{5{,}2^2\, R_2^2} = \frac{1}{27} = 0{,}04$$

Sabiendo que la masa de la Tierra es 5,97 ·1024 kg y la de la Luna 7,35 ·10 22 kg calcula a qué distancia de la Tierra, en la línea que une la Tierra con la Luna puede considerarse que el campo gravitatorio es nulo. Considera que la distancia desde el centro de la Tierra al centro de la Luna es de 384000 km.

Sol: Punto en el que se neutralicen las atracciones: $g_T = g_L \rightarrow \frac{M_T}{r1^2} = \frac{M_L}{r2^2}$

Calcula la fuerza gravitatoria que dos cuerpos puntuales de 10 y 20 kg situados respectivamente en los puntos (0,0) y (10,0), sobre un tercer cuerpo de 4 kg situado en el punto (7,5).



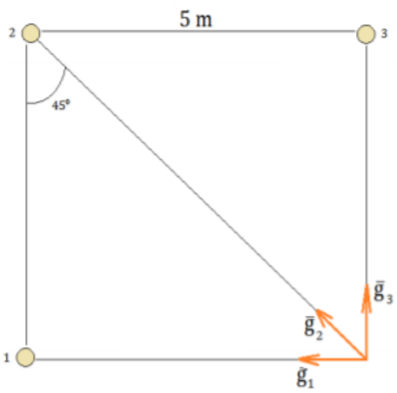
$$\begin{cases} d_1^2 = 7^2 + 5^2 = 74 \\ d_2^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{1,3} = 6{,}67\cdot10^{-11}\,\frac{10\cdot4}{74} = 3{,}6\cdot10^{-11}\ \text{N} \\ F_{2,3} = 6{,}67\cdot10^{-11}\,\frac{20\cdot4}{34} = 15{,}7\cdot10^{-11}\ \text{N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{1,3} = 3{,}6\cdot10^{-11}\cos\alpha\ \boldsymbol{i} + 3{,}6\cdot10^{-11}\ \text{sen}\ \alpha\ \boldsymbol{j} \\ F_{2,3} = 15{,}7\cdot10^{-11}\cos\beta\ \boldsymbol{i} + 15{,}7\cdot10^{-11}\ \text{sen}\beta\ \boldsymbol{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{1,3} = -2{,}9\cdot10^{-11}\ \boldsymbol{i} - 2{,}1\cdot10^{-11}\ \boldsymbol{j}\ \ \text{N} \\ F_{2,3} = 8{,}1\cdot10^{-11}\ \boldsymbol{i} - 13{,}5\cdot10^{-11}\ \boldsymbol{j}\ \ \text{N} \end{cases}$$

En tres vértices de un cuadrado de 5 m de lado se disponen sendas masas de 12 Kg.
Determinar el campo gravitatorio en el cuarto vértice. ¿Qué fuerza experimentará una masa de 4 kg situada en dicho vértice?



$$r_2 = \sqrt{50} = 7{,}07\ m$$

$$g_1 = g_3 = G\,\frac{m_1}{r_1^2} = 6{,}67\cdot10^{-11}\,\frac{12}{5^2} = 3{,}2\cdot10^{-11}\ N/kg$$

$$g_2 = G\,\frac{m_2}{r_1^2} = 6{,}67\cdot10^{-11}\,\frac{12}{7{,}07^2} = 1{,}6\cdot10^{-11}\ N/kg$$

$$g_{2x} = g_2\cdot\cos 45 = 1{,}13\cdot10^{-11}\ N/kg$$

$$g_{2y} = g_2\cdot\text{sen}\,45 = 1{,}13\cdot10^{-11}\ N/kg$$

$$\vec{g}_2 = -1{,}13\cdot10^{-11}\,\hat{\imath} + 1{,}13\cdot10^{-11}\hat{\jmath}$$

$$\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 = -4{,}33\cdot10^{-11}\,\hat{\imath} + 4{,}33\cdot10^{-11}\,\hat{\jmath}$$

2. Una masa de 8 kg está situada en el origen. Calcular:

a) Intensidad del campo gravitatorio y potencial gravitatorio en el punto (2,1) m.

b) Fuerza con que atraería a una masa m de 2 kg, y energía almacenada por dicha masa.

c) Trabajo realizado por la fuerza gravitatoria al trasladar la masa m desde el punto (2,1) m al punto (1,1) m

Sol: a) $g = -9{,}55\cdot10^{-11}\,i - 4{,}77\cdot10^{-11}\,j$ N/kg ; V = $-2{,}39\cdot10^{-10}$ J/kg

b) $F = -1{,}91\cdot10^{-10}\,i - 9{,}55\cdot10^{-11}\,j$ N; Ep = $-4{,}78\cdot10^{-10}$ J ; c) $2{,}77\cdot10^{-10}$ J

3. Dos masas de 5 kg se encuentran en los puntos (0,2)m y (2,0) m. Calcular:

a) Intensidad de campo gravitatorio y potencial gravitatorio en el origen.

b) Trabajo realizado por la fuerza gravitatoria al trasladar una masa de 1 kg desde el infinito hasta el origen.

Sol: a) $g = 8{,}34\cdot10^{-11}\,i + 8{,}34\cdot10^{-11}\,j$ N/kg ; V = $-3{,}34\cdot10^{-10}$ J/kg b) $3{,}34\cdot10^{-10}$ J

La velocidad orbital de un planeta depende del radio de la órbita que describe en torno al Sol.
Calcula la relación que existe entre las velocidades orbitales de la Tierra y Marte, sabiendo que los radios de las órbitas respectivas son: $r_T = 1{,}49 \cdot 10^{11}$ m; $r_M = 2{,}28 \cdot 10^{11}$ m.

$$\frac{GM_s \cdot m_T}{R_{oT}^2} = \frac{m_T v_T^2}{R_{oT}} \Rightarrow V_T^2 = \frac{GM_s}{R_{oT}} \qquad v_M^2 = \frac{GM_s}{R_{oM}}$$

$$\frac{v_M^2}{v_T^2} = \frac{R_{oT}}{R_{oM}} = \frac{1{,}49 \cdot 10^{11}}{2{,}28 \cdot 10^{11}} \Rightarrow v_M = 0{,}81\, v_T$$

Un satélite se encuentra en una órbita circular alrededor de la Tierra y tiene un periodo de 2 h. ¿A qué altura de la superficie de la Tierra se encuentra el satélite? (Toma como radio de la Tierra el valor de 6 400 km.)

$$\left.\begin{aligned} m\frac{v^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2} \rightarrow R = \frac{GM}{v^2} \\ v = \frac{2\pi R}{T} \end{aligned}\right\} \quad R^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2} \rightarrow R = 7\,900 \text{ km}$$

$$h = 7\,900 \text{ km} - 6\,400 \text{ km} = 1\,500 \text{ km}.$$

Se coloca un satélite meteorológico de 1 000 kg en órbita circular a 300 km sobre la superficie terrestre. Determina:

a) **La velocidad lineal, la aceleración radial y el periodo en la órbita.**
b) **El trabajo que se requiere para poner en órbita el satélite.**
Datos: Radio medio de la Tierra, 6 370 km; $g_0 = 9{,}80$ m/s^2.

$$G\frac{Mm}{(R+h)^2} = m\frac{v^2}{R+h} \rightarrow v = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}} = 7\,721{,}3 \text{ m/s}$$

$$a = \frac{v^2}{R+h} = \frac{5{,}93 \cdot 10^7 \text{ m}^2/\text{s}^2}{6{,}67 \cdot 10^6 \text{ m}} = 8{,}94 \text{ m/s}^2$$

Considera dos satélites de masas iguales en órbitas circulares alrededor de la Tierra. Uno de ellos gira en una órbita de radio r y el otro en una órbita $2r$. Contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

a) **¿Cuál de los dos se desplaza con mayor velocidad?**
b) **¿Cuál de los dos tiene mayor energía potencial?**
c) **¿Cuál de ellos tiene mayor energía mecánica?**

a) $\frac{GM_T m}{R_o^2} = m\frac{v_0^2}{R_o} \Rightarrow v_o = \sqrt{\frac{GM_T}{R_o}}$

$v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_{o1}}}$; $v_2 = \sqrt{\frac{GM_T}{2R_{o1}}} \rightarrow v_1 = \sqrt{2}\, v_2$

b) $E_{p1} = -\frac{GM_T m}{R_o}$ $\quad E_{p2} = -\frac{GM_T m}{2R_o} \rightarrow E_{p1} = 2\,E_{p2}$

c) $E_{m1} = \frac{1}{2}mv_1^2 + E_{p1} = \frac{1}{2}m(\sqrt{2}\,v_2)^2 + 2E_{p2} = 2\left(\frac{1}{2}mv_1^2 + E_{p2}\right) = E_{m2}$

En un instante t_1 la energía cinética de una partícula es 30 J y su energía potencial, 12 J. En un instante posterior, t_2, la energía cinética de la partícula es 18 J.

a) **Si únicamente actúan fuerzas conservativas sobre la partícula, ¿cuál es su energía potencial en el instante t_2?**
b) **Si la energía potencial en el instante t_2 fuese 6 J, ¿actuarían fuerzas no conservativas sobre la partícula?**

a) $E_{mo} = E_{mf} \Rightarrow 42 \text{ J} = 18 \text{ J} + E_p \Rightarrow E_p = 24 \text{ J}$

b) Si E_p en t_2 6 J $\rightarrow E_{mo} \neq E_{mf}$; 42 J > 18 J + 6 J
no se cumple

Un satélite artificial describe una órbita circular alrededor de la Tierra. La velocidad de escape a la atracción terrestre desde esa órbita es la mitad que la velocidad de escape desde la superficie terrestre.

a) **¿A qué altura se encuentra el satélite?**
b) **¿Se trata de un satélite estacionario?**

a) Energía Mecánica, $\frac{1}{2}mv_T^2 + \left(-G\frac{M_T m}{R_T}\right) = 0 \rightarrow v_T = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$

a una altura h $\quad v_h = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T + h}} = \frac{1}{2}v_T = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$

$\rightarrow h = 3R_T$

b) No, porque el periodo de rotación del satélite es distinto que el de rotación terrestre.

El radio de un planeta es la tercera parte del radio terrestre, y su masa la mitad. Calcula la gravedad en su superficie y la velocidad de escape del planeta en función de sus correspondientes
valores terrestres.

$$\left.\begin{aligned} g_P = G\frac{M_p}{R_P^2} \\ R_p = \frac{1}{3}R_T \text{ y} \\ M_P = \frac{1}{2}M_T \end{aligned}\right\} \quad g_P = G\frac{M_P}{R_P^2} = G\frac{\frac{1}{2}M_T}{\left(\frac{1}{3}R_T\right)^2} = \frac{9}{2}G\frac{M_T}{R_T^2} = \frac{9}{2}g_0$$

$$v_P = \sqrt{\frac{2GM_P}{R_P}} \rightarrow v_P = \sqrt{\frac{2G\frac{1}{2}M_T}{\frac{1}{3}R_T}} = \sqrt{\frac{3GM_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,v_T$$

Marte tiene dos satélites, llamados Fobos y Deimos, cuyas órbitas tienen radios de 9 400 y 23 000 km, respectivamente. Fobos tarda 7,7 h en dar una vuelta alrededor del planeta. Aplicando las leyes de Kepler, halla el periodo de Deimos.

De la Tercera Ley de Kepler

$$T_1 = \sqrt{\frac{T_2^2 r_1^3}{r_2^3}} = \sqrt{\frac{(7{,}7\ \text{h})^2 \cdot (23\,000\ \text{km})^3}{(9\,400\ \text{km})^3}} = 29{,}4\ \text{h}$$

La masa de la Tierra es $6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg y la masa de la Luna $7{,}2 \cdot 10^{22}$ kg. Si la fuerza gravitatoria entre ellas es $1{,}9 \cdot 10^{20}$ N, ¿qué distancia hay entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna?

$$r = \sqrt{\frac{GMm}{F}} = 3{,}9 \cdot 10^8\ \text{m}$$

Resuelve las siguientes cuestiones:
a) Expresa la aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta en función de la masa de este, de su radio y de la constante de gravitación universal G.
b) Si la aceleración de la gravedad sobre la superficie terrestre vale 9,81 $m s^{-2}$, calcula la aceleración de la gravedad a una altura sobre la superficie terrestre igual al radio de la Tierra.

$$a)\quad mg = G\frac{Mm}{R^2} \rightarrow g = \frac{GM}{R^2}$$

$$b)\quad g_o = \frac{GM}{R_T^2} = 9{,}81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$g_h = \frac{GM}{(R_T+h)^2} = \frac{GM}{4R_T^2} = \frac{1}{4}g_o = 2{,}45$$

Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad de 4 000 m/s. Calcula la altura máxima que alcanzará. (Dato: R_T = 6 400 km.)

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R_T} = -G\frac{Mm}{R_T+h} \rightarrow \frac{1}{2}v^2 = \frac{GM}{R_T} \cdot \frac{h}{R_T+h}$$

en función de la gravedad, $g = \dfrac{GM}{R_T^2}$

$$\frac{1}{2}v^2 = R_T g\frac{h}{R_T+h} \quad \rightarrow \quad h = \frac{0{,}5v^2R_T}{R_Tg - 0{,}5v^2} = 9{,}4 \cdot 10^5\ \text{m}$$

Calcula el trabajo necesario para trasladar un satélite terrestre de 500 kg desde una órbita circular de radio $r_0 = 2R_T$ hasta otra de radio $r_1 = 3R_T$. Datos: $R_T = 6{,}4 \cdot 10^6$ m; g_0 = 9,8 m/s

$$E_1 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{2R} = -\frac{R}{4}mg$$

$$E_2 = -\frac{GMm}{6R} = -\frac{R}{6}mg$$

$$\text{Trabajo } E_2 - E_1 = Rmg\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = 2{,}6 \cdot 10^9\ \text{J}$$

Un cierto planeta esférico tiene una masa M = 1,25 · 1023 kg y un radio r = 1,5 · 106 m. Desde su superficie se lanza verticalmente hacia arriba un objeto, el cual alcanza una altura máxima de r/2. Despreciando el rozamiento, determina:
***a)* La velocidad con que fue lanzado el objeto.**
***b)* La aceleración de la gravedad en el punto más alto alcanzado por el objeto.**
Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N $m^2 kg^{-2}$

$$a)\quad E_{mo} = E_{mf} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_pm}{R_p} = -\frac{GM_pm}{R_p+h} \rightarrow v^2 = \frac{2GM_p}{3R_p}$$

$$\text{para } h = \frac{R_p}{2} \rightarrow v^2 = 3{,}7 \cdot 10^6\ \text{m}^2 \rightarrow v = \sqrt{3{,}7 \cdot 10^6} = 1{,}925 \cdot 10^3$$

$$b)\quad \frac{4 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 1{,}25 \cdot 10^{23}\ \text{kg}}{9 \cdot 1{,}5^2 \cdot 10^{12}\ \text{m}^2} = 1{,}65\ \text{m/s}^2$$

Un asteroide está situado en una órbita circular alrededor de una estrella y tiene una energía total de -10^{10} J. Determina:
***a)* La relación que existe entre las energías potencial y cinética del asteroide.**
***b)* Los valores de ambas energías potencial y cinética.**

$$E_p = -\frac{GMm}{R} = \frac{mv^2}{R_o} \rightarrow E_p = -2E_c$$

$$Ec + Ep = -10^{-10}J \qquad E_c - 2E_c = -10^{-10}J$$

$$E_c = 10^{-10}J\ ;\ E_p = -2E_c = -2 \cdot 10^{-10}J$$

El periodo de revolución de Júpiter en su órbita alrededor del Sol es aproximadamente 12 veces mayor que el de la Tierra en su respectiva órbita. Considerando circulares las órbitas de los dos planetas, determina:
***a)* La razón entre los radios de las respectivas órbitas.**
***b)* La razón entre las aceleraciones de los dos planetas en sus órbitas.**

$$a)\quad \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \sqrt[3]{\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2} = \sqrt[3]{12^2} = 5{,}2; \rightarrow R_1 = 5{,}2R_2$$

$$b)\quad m\frac{v^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2} \qquad a_1 = \frac{v_1^2}{R_1} = \frac{GM_s}{R_1^2}; \qquad a_2 = \frac{v_2^2}{R_2} = \frac{GM_s}{R_2^2}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{R_2^2}{5{,}2^2\,R_2^2} = \frac{1}{27} = 0{,}04 \qquad a_1 = 0{,}04\,a_2$$