Derivadas - Ofimega

1.- Derivada de una función en un punto: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

2.- Tabla de derivadas

Potenciales	*Logarítmicas*	*Exponenciales*	*Trigonométricas*
$D\,x^n = n \cdot x^{n-1}$	$D \ln x = 1/x$	$D\,e^x = e^x$	D sin(x) = cos(x)
$D\sqrt{x} = 1/2\sqrt{x}$	$D \log_a x = 1/x \cdot 1/\ln a$	$D\,a^x = a^x \cdot \ln a$	D cos(x) = - sin(x)
$D\,x = 1$	$D \log x = 1/x \cdot 1/\ln 10$	$D\,10^x = 10^x \cdot \ln 10$	$D \tan(x) = 1/\cos^2 x = \sec^2(x)$
Si es una función: $D\,u^n = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	*Si es una función:* $D \ln(u) = 1/u \cdot u'$	*Si es una función:* $D\,e^u = e^u \cdot u'$	*Si es una función:* $D \sin(u) = \cos(u) \cdot u'$

3.- Derivadas compuestas:

- De la constante: $D\,c = 0$; $D(c \cdot f(x)) = c \cdot D\,f(x)$ *(c es un nº constante)*
- De la suma/resta: $D\,(f(x) \pm g(x)) = D\,f(x) \pm D\,g(x)$ *; o también:* $D\,(u+v) = Du + Dv$
- Del producto: $D\,f(x) \cdot g(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ *; o:* $y = u \cdot v \rightarrow y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
- Del cociente: $D\,\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ *; o:* $y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
- Exponente funciones: $y = u^v \rightarrow$ aplicando *ln* a cada lado: $y' = u^v \cdot v' \cdot \ln u + v \cdot u^{v-1}$; *(u y v son funciones)*

- Función de función:

Regla de la cadena: $D\,f(g(x)) = D\,f(g) \cdot D\,g(x)$; *o:* $D(u(v)) = u'(v) \cdot v'$ *(u, v son funciones)*

4.- Tasa de variación media:

TVM: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ → cociente entre la tasa de variación y la amplitud del intervalo $TVM[a, a+h] = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Ejemplo: Calcular la T.V.M. de la función $f(x) = x^2 - x$ en el intervalo [1,4]

$$TVM[1,4] = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{12-0}{3} = 4$$

Ejercicios resueltos

Deriva las siguientes funciones:

	Soluciones
1. $f(x) = 2x^2 - 6x + 5$	Sol: $4x - 6$
2. $f(x) = 1/x$	Sol: $-1/x2$
3. $f(x) = \ln(x^2)$	Sol: $1/x^2 \cdot 2x$
4. $y = 9^x$	Sol: $y' = 9^x \cdot \ln 9$
5. $y = 3x \cdot sinx$	Sol: $y' = 3(\sin x + x \cos x)$
6. $y = tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$	Sol: $y' = 1/\cos^2 x$
7. $f(x) = \ln(x^2)$	Sol: $1/x^2 \cdot 2x$
8. $y = 3x \cdot 2^x$	Sol: $y' = 3 \cdot 2^x(1 + x \cdot \ln 2)$
9. $y = \sqrt{x+1}$	Sol: $y = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$
10. $y = 8^{8x}$	Sol: $y = 8^{8x} \cdot \ln 8 \cdot 8$
11. $y = \sin^2 x$	Sol: $y = \cos^2 x \cdot 2$
12. $y = \cos^{2x} x$	Sol: $y = \cos^{2x} x \cdot \ln \cos x \cdot (-\sin x)$

Hoja de ejercicios derivadas 1

Soluciones

1.- Funciones racionales:

a) $y = \frac{x+3}{x^2-1}$; — $y' = \frac{1\cdot(x^2-1)-(x+3)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-6x-1}{x^4-2x^2+1}$

b) $y = \frac{5}{x^5} + \frac{x^5}{5}$ — $y' = -\frac{25}{x^6} + x^4$

2.- Funciones irracionales:

a) $y = \sqrt[3]{(5x-3)^2}$ — $y' = \frac{2}{3}(5x-3)^{-1/3} = \frac{10}{3\sqrt[3]{/5x-3}}$

b) $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$ — $y' = -\frac{1}{\sqrt{x^3}}$

c) $y = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ — $y' = -\frac{3}{2\sqrt{x^5}}$

d) $y = \sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$ — $y' = \frac{-4x}{3\sqrt[3]{(x^4-1)^2(x^2-1)^2}}$

3.- Funciones exponenciales:

a) $y = \frac{e^{2x}}{x^2}$ — $y' = \frac{2e^{2x}(x-1)}{x^3}$

b) $y = 6^{(ln5x)}$ — $y' = 6^{ln5x}\cdot ln6\cdot\frac{1}{x}$

c) $y = e^{\sqrt{7x+3}}$ — $y' = \frac{7e^{\sqrt{7x+3}}}{2\sqrt{7x+3}}$

4.- Funciones logarítmicas:

$y = ln(2x^2-3x+1)$; $y = ln\sqrt{2x-3}$; $y = log_2(x^2-5x+6)$ — $\frac{4x-3}{2x^2-3x+1}$; $\frac{1}{2x-3}$; $\frac{2x-5}{ln2(x^2-5x+6)}$

5.- (*) Deriva y simplifica:

$y = ln\frac{1+senx}{1-senx}$; $y = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$; $y = \sqrt{ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ — $\frac{2}{cosx}$; $\frac{-4}{(e^x-e^{-x})^2}$; $-\frac{1}{senx}$

6.- Deriva y simplifica:

$y = Ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; $y = Ln\frac{a+x}{a-x}$; $y = \frac{senx}{1+\cos x}$ — $\frac{1}{1-x^2}$; $\frac{2a}{a^2-x^2}$; $\frac{1}{1+\cos x}$

$y = arc\ sen\ mx$; $y = arc\ cos\frac{1-x^2}{1+x^2}$ — $\frac{m}{\sqrt{1-m^2x^2}}$; $\frac{2}{1+x^2}$

7.- Calcula tangentes:

a) Tangente o derivada de $f(x) = x^4 + 4x - 1$ en el punto de abscisa *x = 1*

b) Tangente o derivada de $f(x) = Ln(x+3)$ en *x = 2*

c) Tangente o derivada de $f(x) = \cos(5x+4)$ en $x = \pi$

8.- Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3sen2x$ en el punto de abscisa: *x = 0.*

9.- Valores de *a* y *b* para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & si\ \ x \le 2 \\ ax^2 + b & si\ \ x > 2 \end{cases}$ sea derivable en *x = 2?*

10.- El espacio recorrido por un móvil viene dado por la función $s(t) = 3t^2 - t + 1$ donde s se mide en metros y t en segundos. Calcula la velocidad en el instante *t = 2* segundos.

11.- Un heladero ha comprobado que, a un precio de 50 céntimos de euro la unidad, vende una media de 200 helados diarios. Por cada céntimo que aumenta el precio, vende dos helados menos al día. Si el coste por unidad es de 40 céntimos, ¿a qué precio de venta es máximo el beneficio diario que obtiene el heladero? ¿Cuál será ese beneficio?

Solución: B(x) = (200 - 2x) (x + 10) → *B* (45) = 6050 céntimos, es decir, de 60,50 euros.

Hoja de ejercicios derivadas 2

(soluciones en siguiente hoja)

7. Determine la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (x^2 - x)^6$ b) $f(x) = (2x^3 + 1)^{-5}$

c) $f(x) = (2x + 3)^{\frac{3}{2}}$ d) $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$

e) $f(t) = \sqrt{\frac{t^2+1}{t^2-1}}$ f) $f(u) = \frac{1}{(u+1)^2}$

8. Determine la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^{x^2+6}$ b) $f(t) = e^{3-5\cdot t}$

c) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$ d) $f(u) = \frac{e^{2u}}{u}$

e) $f(x) = 5^{2x+8}$ f) $f(w) = 2w \cdot 2^{6w}$

9. Determine la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = ln(3x - 4)$ b) $f(u) = ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)$

c) $f(t) = (t^2 + 1) \cdot ln(2t + 1)$ d) $f(w) = ln\left(\sqrt{1 + w^2}\right)$

e) $f(x) = log(x^3 + 2)$ f) $f(x) = log_2(x^4 - x)$

10. Determine la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 + \ln{(x^2 + 1)}$ b) $f(t) = e^{\,t} \cdot \sqrt{t^5 + 2}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{e^x + ln(x)}$ d) $f(u) = \ln(\sqrt{u} + 2^u)$

e) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln(x^3 + 2x^2 - 6)$ f) $g(x) = 5^{x^2} + e^x \cdot \operatorname{sen} x$

g) $h(x) = \cos\frac{2x+3}{2x-3}$ h) $j(x) = \operatorname{sen} x^3 \cdot \cos^3 x$

11. En cada caso, determine la derivada segunda $\frac{d^2y}{dx^2}$ ó y''

a) $y = 2x^5 + x^2 - 1$ b) $y = x^6 + ln(x) + 2$

c) $y = e^x - \sqrt{x} - x$ d) $y = e^x \cdot \sqrt{x}$

13. Aplicando la Regla de L'Hôpital calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3-3x^2}{3x^4-2x}$ b) $\lim\limits_{x\to2}\frac{2x^2-5x+2}{5x^2-7x-6}$

c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x+1-e^x}{x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to2}\frac{ln(x-1)}{x-2}$

e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2e^x-3+e^{-2x}}{x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$

Soluciones hoja 2

7. a) $6 \cdot (x^2 + x)^5 \cdot (2x + 1)$

b) $-5 \cdot (2x^3 + 1)^{-6} \cdot 6x^2$

c) $\frac{3}{2} \cdot (2x + 3)^{1/2} \cdot 2 = 3 \cdot (2x+3)^{1/2}$

d) $\frac{3x^2}{2 \cdot \sqrt{x^3+1}}$

e) $\frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{t^2+1}{t^2-1}}} \cdot \frac{2t(t^2-1)-(t^2+1) \cdot 2t}{(t^2-1)^2}$

f) $-\frac{2(u+1)}{(u+1)^4} = \frac{-2}{(u+1)^3}$

8. a) $2x \cdot e^{x^2+6}$

b) $-5 \cdot e^{3-5 \cdot t}$

c) $2xe^{-x^2} + x^2 e^{-x^2} \cdot (-2x) = 2xe^{-x^2}(1 - x^2)$

d) $\frac{2 \cdot e^{2u} \cdot u - e^{2u}}{u^2}$

e) $5^{2x+8} \cdot ln(5) \cdot 2$

f) $2 \cdot 2^{6w} + 2w \cdot 2^{6w} \cdot ln(2) \cdot 6$

9. a) $\frac{3}{3x-4}$

b) $\frac{1}{\frac{1+u}{1-u}} \cdot \frac{1-u-(1+u)\cdot(-1)}{(1-u)^2} = \frac{2}{1-u^2}$

c) $\frac{2t^2+2}{2t+1} + 2t \cdot ln(2t + 1)$

d) $\frac{1+w^2-w \cdot 2w}{(1+w^2)^2} = \frac{w}{1+w^2}$

e) $\frac{1}{(x^3+2) \cdot ln(10)} \cdot (3x^2)$

f) $\frac{1}{(x^4-x) \cdot ln(2)} \cdot (4x^3 - 1)$

10. a) $3x^2 + \frac{1}{x^2+1} \cdot (2x)$

b) $e^t \cdot \sqrt{t^5 + 2} + e^t \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{t^5+2}} \cdot (5t^4)$

c) $\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(e^x + ln(x))^2}} \left(e^x + \frac{1}{x}\right)$

d) $\frac{1}{\sqrt{u}+2^u} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{u}} + 2^u \cdot ln(2)\right)$

e) $f'(x) = \frac{\ln(x^3 + 2x^2 + 6)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}\,(3x^2 + 4x)}{x^3 + 2x^2 - 6}$

f) $g'(x) = 5^{x^2} \ln 5 \cdot 2x + e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x$

g) $h'(x) = -\operatorname{sen}\frac{2x+3}{2x-3} \cdot \left(\frac{2(2x-3)-2(2x+3)}{(2x-3)^2}\right) = -\operatorname{sen}\frac{2x+3}{2x-3} \cdot \left(\frac{\cancel{4x}-6-\cancel{4x}-6}{(2x-3)^2}\right) = \frac{12}{(2x-3)^2}\operatorname{sen}\left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)$

h) $j'(x) = \cos x^3 \cdot 3x^2 \cdot \cos^3 x + \operatorname{sen} x^3 \cdot 3\cos^2 x(-\operatorname{sen} x) = 3x^2 \cdot \cos x^3 \cdot \cos^3 x - 3 \cdot \operatorname{sen} x^3 \cdot \cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x$

11. a) $\frac{d^2y}{dx^2} = 40x^3 + 2$

b) $\frac{d^2y}{dx^2} = 30x^4 - \frac{1}{x^2}$

c) $\frac{d^2y}{dx^2} = e^x + \frac{1}{4}x^{-3/2}$

d) $\frac{d^2y}{dx^2} = e^x x^{1/2} + e^x x^{-1/2} - \frac{e^x x^{-3/2}}{4}$

12. a) 0 b) $\frac{3}{13}$ c) $\frac{-1}{2}$ d) 1 e) 3 f) $\frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}}$