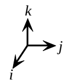
GEOMETRIA 3D

VECTORES EN EL ESPACIO

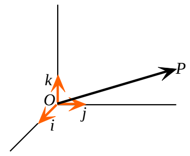
Características de un vector

Módulo – Dirección – Sentido



Base

- <u>Vectores coplanarios</u>: Si al tomar representantes con el mismo origen, quedan todos situados en el mismo plano.
- <u>Vectores no coplanarios</u>: Forman una base porque cualquier otro vector se puede expresar como combinación lineal de ellos.
- ***Base ortogonal:*** Es aquella en la que los vectores son perpendiculares entre si. (Se puede obtener del producto vectorial de otros dos)
- ***Base ortonormal:*** Formada por tres vectores perpendiculares y de módulo unidad. (Se puede obtener un vector unitario dividiendo cada componente por su módulo $\frac{\vec{u}}{|u|}$)



Sistema de referencia en el espacio: Base ortonormal canónica

Cuando un vector $\overrightarrow{OP}$ es combinación lineal de los vectores que forman la base: $\overrightarrow{OP} = x.\vec{\imath} + y.\vec{\jmath} + z.\vec{k}$

Los números *x*, *y*, *z* reciben el nombre de coordenadas del vector y se puede expresar: $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$

Suma de vectores

Sumamos cada coordenada del primer vector, por la correspondiente coordenada del segundo vector.

<u>Ejemplo</u>: $u = 2i + 3j - 5k = (2,3,-5)$ $v = -i + 4j - 6k = (-1,4,-6) \rightarrow u + v = i + 7j - 11k = (1,7,-11)$

Producto de un vector por un número real

Se multiplica cada una de las coordenadas del vector por dicho número.

Ejemplo: Siendo $u = -3i + 2j - k = (-3,2,-1) \rightarrow 3u = 3.(-3i + 2j - k) = -9i + 6j - 3k = (-9,6,-3)$

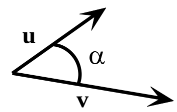
Módulo de un vector $|\vec{v}| = +\sqrt{\boldsymbol{x_1}^2 + \boldsymbol{y_1}^2 + \boldsymbol{z_1}^2}$ equivale a su longitud

<u>Producto escalar</u> de dos vectores

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\alpha$ El producto escalar es conmutativo y su resultado es un número

<u>Ejemplo</u>: Si: $u = 2i + 3j - 5k = (2, 3, -5)$ y $v = -i + 4j - 6k = (-1,4,-6) \rightarrow$ $u \cdot v = -2 + 12 + 30 = 40$

Ángulo de dos vectores



Despejando el ángulo del producto escalar: $\cos\alpha = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|u|.|v|}$

<u>Ejemplo:</u>

Halla el ángulo que forman los vectores $u = (3,2,6)$ y $v = (-4,5,1)$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = -12 + 10 + 6 = 4$

$|u| = \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7$; $|v| = \sqrt{16 + 25 + 1} = \sqrt{42} \rightarrow$ $\cos\alpha = \frac{u \cdot v}{|u|.|v|} = \frac{4}{7\sqrt{42}}. \rightarrow$ $\alpha = 84{,}94º$

<u>Producto vectorial</u>

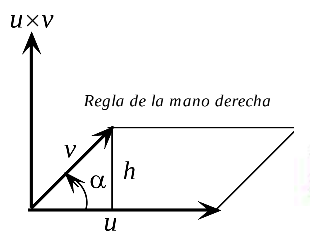
Dados dos vectores en el espacio: $\vec{u}\,(x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v}\,(x_2, y_2, z_2)$

Su producto es otro vector perpendicular a los anteriores:

$u \times v = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ i & j & k \end{bmatrix}$ o también: $u \times v = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$

El producto $u \times v$ tiene las siguientes características:

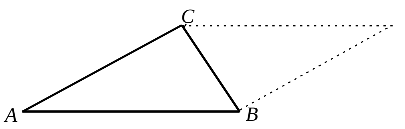
- ***Módulo:*** El producto de los módulos por el seno del ángulo que forman: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |u|.|v|.sen\alpha$
- ***Dirección:*** Perpendicular a los los vectores *u* y *v*.
- ***Sentido:*** Viene dada por la regla de la mano derecha:
  El producto vectorial es <u>anticonmutativo</u>: $u \times v = -v \times u$
  El producto vectorial de dos vectores paralelos es nulo,
  El módulo del producto vectorial coincide con el <u>área del paralelogramo</u>
  $|u \times v| = |u| \cdot |v| \cdot sen\alpha = |u| \cdot h$ = área del paralelogramo.
  <u>Sirve</u> para calcular otro vector perpendicular o para el área o altura de triángulos



Área del triángulo:

Dado el triángulo de vértices A, B y C,
como el triángulo es la mitad del paralelogramo, su área será:

$$Área = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$



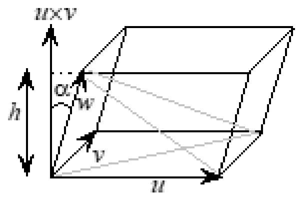
Producto mixto

Producto mixto de tres vectores *u*, *v* y *w* es un número que se obtiene al realizar el producto escalar del primero por el producto vectorial de los otros dos. $[u, v, w] = \mathrm{u} \cdot (v \times w)$

Coincide con el valor del determinante: $[u, v, w] = \mathrm{u} \cdot (v \times w) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

Interpretación geométrica:

Coincide con el volumen del paralelepípedo formado por sus vectores
$w \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = |w| \cdot |u \times v| \cdot cos\,\alpha = |u \times v| \cdot |w| \cdot cos\,\alpha$
$|w.(u \times v)|$ = área de la base $\times$ altura = <u>Volumen del paralelepípedo</u>.
El volumen del tetraedro formado, será 1/6 el volumen del paralepípedo.



<u>Ejemplos:</u>

1. Calcula el producto vectorial de los vectores $u = (1,7,-3)$ y $v = (-5,0,4)$
   Conviene colocar el primer vector y debajo de este el segundo:

u = (1, 7, -3)
v = (-5, 0, 4)

$$u \times v = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -3 \\ -5 & 0 & 4 \\ i & j & k \end{bmatrix} \qquad u \times v = \left(\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} \right) = (28, 11, 35)$$

2. Dados los vectores u = *(3, 2, 5)* y *v = (4, 1, 6),* halla un vector perpendicular a ambos y el área del paralelogramo que determinan.
   Un vector perpendicular a ambos es el producto vectorial: *u = (3, 2, 5)* *v = (4, 1, 6)*

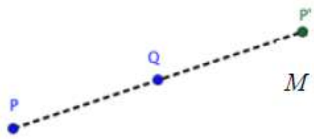
$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 12i + 20j + 3k - 8k - 5i - 18j = 7i + 2j - 5k = (7,2,-5)$$

El área del paralelogramo que determinan es el módulo del producto vectorial:
Área = $||u \times v|| = \sqrt{7^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{78}$ → Área = $\sqrt{78}$ u^2

Puntos:

Punto medio:

Utilizar la fórmula de la suma de sus componentes entre 2:



$$M\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right)$$

Punto simétrico:

Respecto a otro punto: P' es el que hace que Q sea el punto medio.
Respecto a una recta: Cuando r pasa por el punto medio Q y el vector PP' es perpendicular. Puede hacerse con un plano perpendicular a la recta que pasa por P.
Respecto de un plano: Cuando el plano pasa por el punto medio y el vector PP' es perpendicular al plano.

Puntos alineados:

Tres o más puntos están alineados si están en una misma recta, y por tanto el rango de los vectores determinados por ellos es 1 o los vectores formados por los puntos, son proporcionales.

Puntos y vectores coplanarios:

Dos o más puntos son coplanarios, si los vectores determinados por ellos también son coplanarios.
Dos o más vectores son coplanarios si su rango es 2 y los vectores son dependientes.
Tres vectores son dependientes si el determinante que forman = 0

Ejercicios resueltos de vectores

1. Determina t para que los vectores $\vec{u}\ (1,1,t), \vec{v}\ (1,-2,t)$ y $\vec{w}\ (0,t,1-t)$, sean linealmente dependientes.

Solución:

Método 1: Hacer uno de ellos c.l. de los otros dos: (1,1,t) = α (1, -2, t) + β (0,t, 1-t)

$$\begin{cases} 1 = \alpha \cdot 1 + 0 \\ 1 = -2\alpha + t\,\beta \\ t = t\alpha + (1-t)\beta \end{cases} \rightarrow \alpha=1\ ;\ \beta=3 \rightarrow t=1$$

Método 2: El determinante formado debe ser 0 para que el rango no sea 3: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & -2 & t \\ 0 & t & 1-t \end{vmatrix}$ =0 → t = 1

2.- ¿Puede haber dos vectores u y v tales que: *u·v = -3, |u| = 1 y |v| =2* ?

Si α es el ángulo que forman, de la definición de producto escalar, se obtiene: $u.v = |u|.|v|.\cos\alpha$
Y entonces, -3 = 1·2·cos α → cos α = -1,5 → Dicha relación es <u>imposible</u> porque $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

3.- Halla el valor de **a** para que los vectores $u = (-2,1,5)$ y $v = (a, 2,6)$, sean perpendiculares.

Para que sean perpendiculares, el producto escalar =0 → (-2, 1, 5) · (a, 2, 6) = 0 → -2a + 2 + 30 = 0 → a = 16

4.- Halla un vector w cuyo módulo sea 4 y además perpendicular a $u = (2,0,1)$ y $v = (3,-1,2)$

Como el producto vectorial de dos vectores es un vector perpendicular: $u \times v = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \right) = (1,-1,-2)$
$u \times v = (1,-1,-2)$ es perpendicular a **u** y a **v**.
Lo dividimos por su módulo para obtener un vector de módulo unidad:
$|u \times v| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$; vector unitario y perpendicular: → $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$
El vector unitario obtenido lo multiplicamos por 4 y obtenemos el vector buscado:

$$w = 4\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right) = \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{-2\sqrt{6}}{3}, \frac{-4\sqrt{6}}{3}\right)$$

5.- Comprueba si los vectores (1, 2, 3), (4, 5, 6) y (7, 8, 9) de R^3 son linealmente independientes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \neq 0$$

Aplicando Gauss: el rango es 3 (o el determinante es distinto de 0) → Sistema Compatible Determinado

6.- El vector $v = (1,3,-2)$ está dado en la base canónica.
Halla sus componentes respecto de la base $B = \{(1,1,1), (1,0,1), (0,2,3)\}$

Como se dependiente de esa base: $(1,3,-2) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,0,1) + \lambda(0,2,3)$

Esto nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + 2\lambda = 3 \\ \alpha + \beta + 3\lambda = -2 \end{array}\right\}$

Sumando la 1ª ecuación, cambiada de signo a las otras dos: $\left.\begin{array}{l} -\beta + 2\lambda = 2 \\ 3\lambda = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = -1$ y entonces $\beta = -4$

Si el valor de β lo llevamos a la 1ª ecuación del sistema inicial, $\alpha - 4 = 1 \Rightarrow \alpha = 5$
El vector *v* queda expresado en esas base la base en la forma siguiente: $(1,3,-2) = 5(1,1,1) - 4(1,0,1) - 1(0,2,3)$

7.- Estudia si los vectores (1, 1, 0), (0,1, 1) y (2, 1, –1) forman una base de R^3

Sol:

Por Gauss: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ o Por determinantes: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ = 0

Rango =2 y, por tanto, no forman una base de R^3

8.- dados los vectores $u = (3,2,5)$ y $v = (4,1,6)$ halla el área del triángulo que determinan.

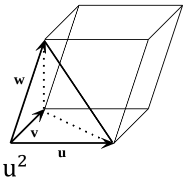
El área del triángulo determinado por dos vectores viene dada por la fórmula siguiente: $Área = \frac{1}{2}|\ \vec{u} \times \vec{v}\ |$

Hemos de hallar, por tanto, el producto vectorial de los dos vectores dados:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 7i + 2j - 5k = (7,2,-5) \ \rightarrow\ ||u \times v|| = \sqrt{7^2 - 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{78}\ Área = \frac{1}{2}\sqrt{78}$$

9.- Dados los vectores $u = (3,-2,5)$, $v = (-4,1,6)$ y $w = (2,0,-1)$, halla el volumen del tetraedro que forman

El volumen del tetraedro es $\frac{1}{6}$ del producto mixto (en valor absoluto).



$$u \cdot (v \times w) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -4 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 24 - 10 + 8 = -29 \ \rightarrow\ Volumen_{(tetraedro)} = \frac{1}{6}|-29| = \frac{29}{6}\ \mathrm{u}^2$$

10.- Dados los 3 vectores: $a = (1,0,-1)$, $b = (0,2,-1)$ y $c = (2,0,0)$. Halla:

a) Valor absoluto del producto mixto de a, b y c y da su significado geométrico.
b) Ángulo que forman b y c.
c) Razona si $\{a, b, c\}$ forman una base y, en caso afirmativo, halla las coordenadas del vector $u = (1,-2,0)$ en dicha base.

Solución

a) $[a, b, c] = a.(b \times c) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2(0-(-2)) = 4$ Valor absoluto $|4| = 4$

Coincide con el volumen del paralelepípedo definido por los tres vectores.

b) Para calcular el ángulo que forman b y c a partir del producto escalar: $b.c = ||b||.||c||.cos\ \alpha$ $cos\ \alpha = \frac{b.c}{||b||.||c||} = \frac{0.2+2.0+(-1).0}{\sqrt{0^2+2^2+(-1)^2}.\sqrt{2^2+0^2+0^2}} = \frac{0}{\sqrt{5}.2} = 0$ Si $cos\ \alpha = 0$, entonces α = 90º

c) Mediante Gauss o determinantes.
Si el determinante es distinto de cero, los vectores son linealmente independientes.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2(0-(-2)) = 4 \neq 0$$

Y como estamos en R^3 los vectores forman una base. Esto significa que cualquier otro vector se puede expresar como combinación lineal de ellos. Si queremos hallar las coordenadas de $u = (1,-2,0)$ respecto de la base, escribimos:

$(1,-2,0) = \alpha(1,0,-1) + \beta(0,2,-1) + \lambda(2,0,0)$ y obtenemos los parámetros

$\left.\begin{array}{l} \alpha + 2\lambda = 1 \\ 2\beta = -2 \\ -\alpha - \beta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ β = –1; α = 1; λ = 0 que son las coordenadas buscadas.

11.- Halla un vector unitario que tenga la misma dirección que $u = (1,1,-2)$

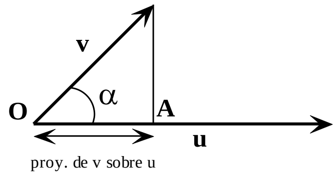
Dado un vector u, entonces el vector $\frac{u}{|u|}$ es unitario.

Módulo de u: $|u| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$

Por tanto, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$ será unitario (modulo1) y de la misma dirección que u.

13.- Prueba que el producto escalar de dos vectores **u** y **v**, es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre el.

Solución:

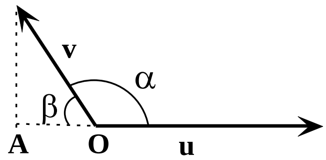


$$u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot cos\,\alpha$$

$$OA = |v| \cdot cos\,\alpha = proy.\text{ de v sobre u}$$

luego $u.v = \left||u|\right| \cdot OA$

En el caso de que el ángulo sea obtuso se obtiene :



Los ángulos α y β son suplementarios

por tanto, $cos\,\alpha = -\,cos\,\beta$

$$u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot cos\,\alpha$$

$$|v| \cdot cos\,\alpha = -|v|\,cos\,\beta = -OA$$

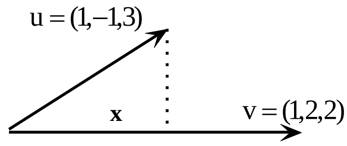
donde OA es la proyección de **v** sobre **u** es decir, $u \cdot v = -|u|.\,OA$

Observación:

- Cuando el producto escalar es positivo, el ángulo es agudo
- Cuando el producto es negativo, el ángulo es obtuso.

14.- Halla la proyección ortogonal del vector $u = (1, -1,3)$ sobre $v = (1,2,2)$

Solución:



$u \cdot v = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 5$ → El ángulo que forman los vectores es agudo (+)

$|v| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$

$u \cdot v = |v| \cdot x \Rightarrow 5 = 3 \cdot x \Rightarrow x = \frac{5}{3}$ (que es la medida del segmento x)

Dividimos el vector v por su módulo para obtener el unitario: $|v| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$; $\frac{v}{|v|} = \frac{1}{3}(1,2,2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Finalmente, el vector unitario obtenido lo multiplicamos por $^5/_3$: $proy.\text{ de u sobre v} = \vec{x} = \frac{5}{3}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{5}{9}, \frac{10}{9}, \frac{10}{9}\right)$

15. Estudia si los cuatro puntos A(1, 2, -1), B(1, 3, 0), C(0, 0, 1) y D(0, 2, 4) son coplanarios.

Solución:

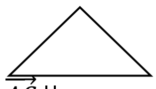
1º Hallar la ecuación del plano determinado por los tres primeros puntos: con el punto $A(1,2,-1)$, y los vectores $\overrightarrow{AB} = (0,1,1)$, y $\overrightarrow{AC} = (-1,-2,2)$ hacemos el determinante:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x - y + z - 1 = 0$$

2º Sustituimos el punto D(0, 2, 4) en la ecuación del plano. Si verifica la ecuación, son coplanarios. En caso contrario, forman un tetraedro: como: $4 \cdot 0 - 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 - 1 \neq 0$, por tanto, los puntos no están en el mismo plano.

16. Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A(0, 1, 0), B(0,1, 1) y C(1, 2, 1)

Solución:



Hallamos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB} = (0,0,1)$ $\overrightarrow{AC} = (1, 1, 1)$

Como el módulo del producto vectorial es un paralelogramo, aplicamos la fórmula: $Área = \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\,||$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) = (-1,1,0) \rightarrow ||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\,|| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2} \rightarrow Área = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ \text{u}^2$

17. Calcula el punto simétrico a A (1,2,3) sobre B (1,0,1)

Solución:

Método 1: Sumando el vector $\overrightarrow{AB}$(0,-2,-2) al punto B: A' = (0,-2,-2) + (1,0,1) = 1,-2,-1

Método 2: Utilizando la fórmula del punto medio: M $\left(\frac{1+x}{2}, \frac{2+y}{2}, \frac{3+z}{2}\right)$ = 1,0,1 → Despejando: x=1 , y=-2, z=-1

Ejercicios de vectores con solución

1.- Determinar los valores del parámetro **a**, para los cuales forman base de R^3 los vectores $(a, 1, -2)$, $(1,a,2)$ y $(2a,1,0)$
Sol. Para todo valor de a distinto de $^1/_2$ y de -1

2.- En el conjunto R^3 se consideran los vectores siguientes: $u = (1,2,-1)$, $v = (3,-2,0)$ y $w = (-7,10,-2)$

Prueba que son linealmente dependientes y encuentra la relación de dependencia.

Sol. Basta comprobar que el determinante es nulo: $2(1,2,-1) - 3(3,-2,0) - (-7,10,-2) = (0,0,0)$

3.- Sean los siguientes vectores de R^3: $u = (1,2,-1)$, $v = (1,-1,1)$ y $w = (2,5a,-3a)$ Determina el valor numérico del parámetro a para que sean linealmente dependientes y encuentra una relación de dependencia.

Sol. Igualar a 0 el determinante: a = 2 : $4(1,2,-1) - 2(1,-1,1) - 2(2,10,-6) = (0,0,0)$

4.- Dados los vectores $A = (a, 8,4)$, $B = (-1,2,0)$ y $C = (0,1,2)$. Halla los valores de **a** para que **A** se pueda expresar como combinación lineal de **B** y de **C** Sol. a = -3

5.- Determina la expresión general de los vectores de R^3 que son combinación lineal de los vectores $(1,2,-1)$ y $((4,1,1)$

Sol. $(\alpha + 4\beta, 2\alpha + \beta, -\alpha + \beta)$

6.- Los vectores $a = -i + 2k$, $b = 2i + j - k$ y $c = i + 2j + 2k$ están expresados en una base ortonormal.
Calcula: $a \times b$; $a \times (c \times a)$ y $a.(a \times b)$ Sol. $a \times b = -2i + 5j - k$; $a \times (c \times a) = 8i + 10j + 4k$; $a.(a \times b) = 0$

7.- Sean u y v tales que $|u| = 2$, $|v| = 1$ y que forman un ángulo de 45º.
Calcula λ de modo que $u + \lambda v$ sea perpendicular a u. Sol. $\lambda = -2\sqrt{2}$

8.- dados los vectores $v = (2,5,-1)$ y $u = (1,0,3)$, halla la proyección ortogonal de v sobre u. Sol. $x = \left(\frac{2}{10}, 0, \frac{-3}{10}\right)$

9.- Dados los vectores $a = (1,2,1)$, $b = (3,1,-2)$ y $c = (4,-1,0)$, determina: Su producto mixto y el volumen del paralelepípedo determinado por ellos. Sol. $[a, b, c] = -25$ $V = 25\ u^3$

Ecuaciones de la recta y del plano en 3D

Ecuaciones de la recta:

Vectorial: $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \boldsymbol{\lambda}(v_1, v_2, v_3)$ (punto + $\boldsymbol{\lambda}$ vector)

Paramétricas:
$$\begin{cases} x = x_o + \lambda v_1 \\ y = y_o + \lambda v_2 \\ z = z_o + \lambda v_2 \end{cases}$$

Continua:
$$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$$

General: No existe, pero de la continua podemos obtener un sistema 2 ecuaciones como la intersección de 2 planos (cartesianas)

Ecuaciones del Plano

Ec. Vectorial $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \boldsymbol{\lambda}(u_1, u_2, u_3) + \boldsymbol{\mu}(v_1, v_2, v_3)$

Ec. Paramétricas
$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

Ec. General: $Ax + By + Cz + D = 0$; Cartesiana: $\boldsymbol{A}x + \boldsymbol{B}y + \boldsymbol{C}z = D$ (el plano no tiene ec. continua)

A, B y C coincide con el vector asociado (perpendicular) al plano

Se obtiene haciendo el determinante: $\begin{vmatrix} x - x_0 & u_1 & v_1 \\ y - y_0 & u_2 & v_2 \\ z - z_0 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$

o con el producto vectorial obtenemos A, B , C y sustituyendo el punto para obtener D

***Ejemplo*. Plano que pasa por tres puntos**

Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos A(2, 1, 3), B(3, 3, 2) y C(3, 2, 5)

- Obtenemos los vectores: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ = (1, 2, -1) y $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ = (1, 1, 2)
- Elegimos, por ejemplo, el punto A(2, 1, 3)
- Desarrollando el determinante: $\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \mathbf{5x - 3y - z - 4 = 0}$

Posiciones relativas

Posición relativa de las rectas

Según sus vectores directores

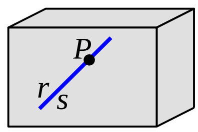
1º.- Si sus vectores directores son proporcionales:

Rectas **paralelas o coincidentes**.

Para saber si son coincidentes:

Coger un punto P de la recta r y sustituir en la otra recta.

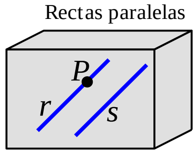
Rectas coincidentes



$$\frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2} = \frac{v_3}{w_3}$$

y el punto P verifica las ecuaciones de la recta s

Rectas paralelas



$$\frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2} = \frac{v_3}{w_3}$$

pero el punto P no verifica las ecuaciones de la recta s

2º. Si sus vectores de dirección no son proporcionales:

Las rectas se **cortan** o se **cruzan**.

Método 1: Con los puntos $\boldsymbol{P(x_0, y_0, z_0)}$ y $\boldsymbol{Q(x_1, y_1, z_1)}$ obtenemos el vector $\overrightarrow{PQ}$

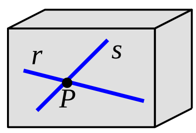
Hacemos el producto mixto. Si el volumen del paralepípedo formado es 0 no tiene altura y los 2 vectores son coplanarios

Determinante: $\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ Se cortan

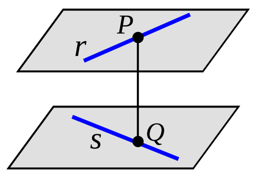
Si el determinante $\neq 0 \rightarrow$ Se cruzan

Método 2: Obtener el punto de intersección del sistema de ecuaciones.

Si es incompatible se cruzan.



Rectas que se cortan

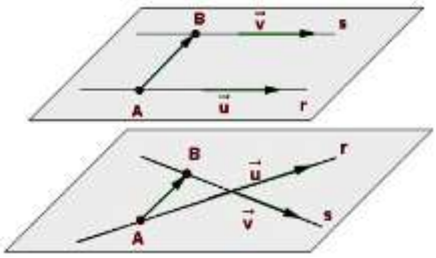


Rectas que se cruzan

Según el rango:

Comparamos el rango formado por los 2 vectores y del ampliado con el vector AB:

- $\text{rango}(\bar{u},\bar{v}) = \text{rango}(\bar{u},\bar{v},AB) = 1 \mapsto$ Coincidentes
- $\text{rango}(\bar{u},\bar{v}) = 1 < \text{rango}(\bar{u},\bar{v},\overline{AB}) = 2 \mapsto$ Paralelas
- $\text{rango}(\bar{u},\bar{v}) = 2 = \text{rango}(\bar{u},\bar{v},\overline{AB}) \mapsto$ Secantes
- $\text{rango}(\bar{u},\bar{v}) = 2 < \text{rango}(\bar{u},\bar{v},\overline{AB}) = 3 \mapsto$ Se cruzan



Ejercicio: Estudia la pos. Relativa de las rectas.

$$r: \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 5 \end{cases}$$

Posición relativa: Como los vectores (-3, 5, 1) y (-1, 2, 0) no son proporcionales, las rectas se cortan o se cruzan.

Un punto de *r* es *A*(2, 3, 0) y un punto de *s* es *B*(1, 0, 5), por tanto, $\overrightarrow{AB} = (-1, -3, 5)$

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -30 + 3 + 2 + 25 = 0 \rightarrow$$ Las rectas <u>se cortan</u> (secantes).

Punto de corte: Si hay un punto de corte, existe un punto común. Por igualación, igualamos las coordenadas de las dos ecuaciones paramétricas, (antes cambiar el nombre de uno de los parámetros)

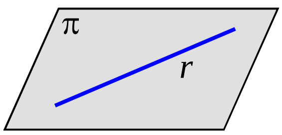
$$\begin{cases} 2 - 3\lambda = 1 - \mu \\ 3 + 5\lambda = 2\mu \\ \lambda = 5 \end{cases} \quad \rightarrow$$ y se obtiene $\lambda = 5$; $\mu = 14$.

Sustituyendo $\lambda = 5$ en la primera ecuación o $\mu = 14$ en la segunda, obtenemos el punto de corte: ***P*(-3, 28, 5)**

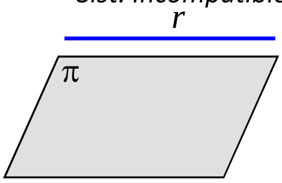
<u>Posición relativa de una recta y un plano</u>

<u>Método 1</u>: En forma general, estudiar sus ecuaciones:

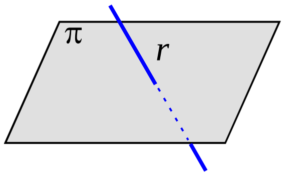
Sist. Comp. Indeterminado



Sist. Incompatible



Sist. Comp. Determinado



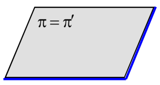
<u>Método 2</u>: Con la recta en ec. paramétricas, sustituimos su ecuación en el plano

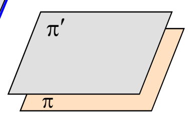
- Si 0 = 0, desapareciendo λ, todos los puntos de la recta son soluciones válidas → contenida.
- Si llegamos al absurdo 0 = k, no hay solución → la recta es exterior
- Si λ = k, la recta corta al plano en un punto. Dicho punto se obtiene sustituyendo el valor de λ en la recta.

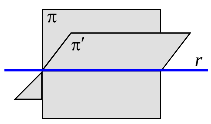
<u>Posición relativa de dos planos</u>

Dados los planos $\begin{cases} \pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$ Estudiamos el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$

- Si Rang(M) = Rang (M') = 1 Sist. Comp. Indet. → **coincidentes**.
- Si Rang(M) < Rang (M') = Sist. Incompatible → **paralelos**.
- Si Rang(M) = Rang (M') = 2 Sist. Comp. Indet. → **secantes**.







<u>Ejemplo:</u>

Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1: x + y + z + 1 = 0$ *y* $\pi_2: x + 2z = 0$. Si se cortan, la ec. de la recta.

En la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ vemos a simple vista, que no son proporcionales, → los planos se cortan en una recta.

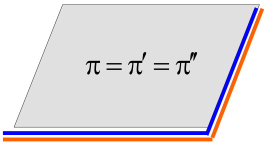
Para hallar la ecuación de la recta, hacemos z = λ y entonces resulta $x = -2\lambda$. Sustituyendo en la primera ecuación se obtiene $y = -1 + \lambda$ La recta intersección, en paramétricas, es: $\begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Posición relativa de tres planos

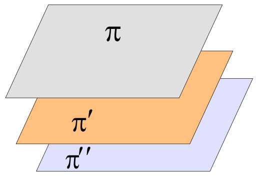
Dados los planos: $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0; \pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0; \pi'' \equiv A''x + B''y + C''z + D'' = 0,$

Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada:

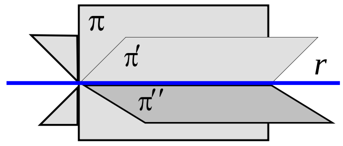
$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}; \quad M* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$



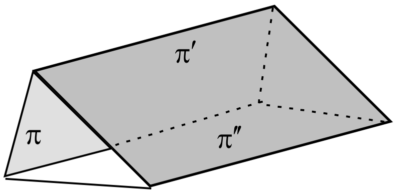
rang(M)=rang(M*)=1



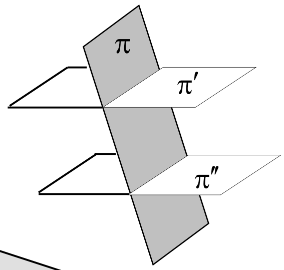
rang(M)=1; rang(M*)=2



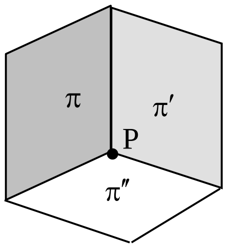
rang(M)=rang(M*)=2



rang(M)=2; rang(M*)=3
Los planos se cortan dos a dos.



rang(M)=2
rang(M*)=3
Hay dos planos paralelos, es decir, con coeficientes proporcionales.



rang(M)=rang(M*)=3=número de incógnitas
Sistema compatible determinado, solución única
Los planos se cortan en el punto P.

3 planos coincidentes: R(M)=1 R(M*)=1
2 planos coincidentes y uno secante: R(M)=2 R(M*)=2
2 planos coincidentes y uno paralelo: R(M)=1 R(M*)=2

Ejemplos:

1. Estudia la posición relativa de los planos:

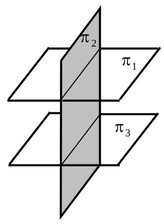
$$\pi_1: 2x + y - z + 6 = 0$$
$$\pi_2: 3x - y + z + 5 = 0$$
$$\pi_3: 4x + 2y - 2z + 1 = 0$$

Método de los coef. Proporcionales:

Como en la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, la tercera fila es el doble de la primera, coeficientes proporcionales, luego los planos π_1 y π_3 son paralelos. Por otra parte, el plano π_2 es secante con π_1 y también con π_3

Método a través del rango.

El rango de la matriz de coeficientes R(M) = 2, mientras que el rango de la matriz ampliada R(M*)=3.
Además, como hay dos planos paralelos, la posición es la que hemos dibujado →



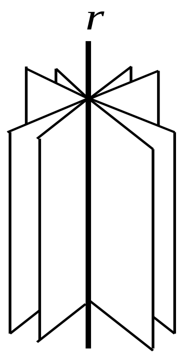
2. Halla el valor de k para que los planos $x + y + z = 2; 2x + 3y + z = 3$ y $kx + 10y + 4z = 11$*, se corten en una recta.*

Se ha de verificar que $rang(M) = rang(M*) = 2$ Aplicando el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ k & 10 & 4 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 10-k & 4-k & 11-2k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 14-2k & 21-3k \end{pmatrix}$$

Para que el rango sea 2 se deba anular la última fila: 14-2K =0 → k= 14/2 → **k = 7**

Haz de planos



Dada una recta r: $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$

se llama haz de planos secantes de arista *r*, al conjunto de todos los planos que pasan por *r*. El haz de planos viene definido por la siguiente ecuación:

$\alpha(Ax + By + Cz + D) + \beta(A'x + B'y + C'z + D') = 0$ es decir, es la combinación lineal de los dos planos que determinan la recta *r*.

Ejemplo:

Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r: $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ 3x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$

y es paralelo a la recta s: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{-1}$

Haz de planos que pasa por r: $2x - y + 3 + \lambda(3x + y + z - 2) = 0$ o bien,

$(2 + 3\lambda)x + (-1 + \lambda)y + \lambda z + (3 - 2\lambda) = 0$

Si es paralelo a s , los vectores $(-1,2,-1)$ y $(2 + 3\lambda, -1 + \lambda, \lambda)$ son perpendiculares, por tanto, el producto escalar es nulo: $-1(2 + 3\lambda) + 2(-1 + \lambda) - 1(3 - 2\lambda) = 0$

Resolviendo la ecuación obtenemos $\lambda = -2$. Sustituyendo en la ecuación del haz, obtenemos $4x + 3y + 2z - 7 = 0$

Ejercicios resueltos

1.- Sea el plano π: $3x - 5y + z - 2 = 0$. Halla la ecuación del plano π', paralelo al anterior, que contiene al punto A(-3, 2, 4)

Sol: La ecuación del plano π' tendrá la forma : $3x - 5y + z + D = 0$

Sustituimos el punto A en la ecuación del plano π' y obtenemos D: $3(-3) - 5.2 + 4 + D = 0$ $\Rightarrow$ D = 15

entonces π': $3x - 5y + z + 15 = 0$ es el plano buscado.

2.- Dada la recta r definida por la intersección de dos planos, escribe su ecuación en forma paramétrica.

r: $\begin{cases} 2x - y - 2z - 2 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$

Sol1: Haciendo: $z = \lambda$ se obtiene el sistema: $\left.\begin{matrix} 2x - y = 2 + 2\lambda \\ x + y = 1 + \lambda \end{matrix}\right\}$ $\rightarrow$ $x = 1 + \lambda$; $y = 0$, por tanto r: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$

Sol2: Dar 2 valores a *x y* obtener 2 puntos *A y B. Ej: (0,0,-3) y =(0,4,0)* luego obtener el vector *AB*

Sol3: Obtener el vector director de la recta del producto vectorial de los vectores asociados (2,-1,-2)x(1,1,-1) y un punto arbitrario dando a x un valor.

3.- Estudia la *posición relativa* de la recta $x - 1 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{4}$ y el plano de ecuación $2x + 4y - z + 4 = 0$

So1: Poner la recta en ec. paramétricas: $x - 1 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{4} = \lambda \Rightarrow$ $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 2 + 4\lambda \end{cases}$

Sustituir en la ecuación del plano: $2(1 + \lambda) + 4(2 + 2\lambda - (2 + 4\lambda) + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = -2$ hay sol.

La recta y el plano se cortan en un punto P de coordenadas $(1 - 2, 2 + 2(-2), 2 + 4(-2))$, es decir $P(-1, -2, -6)$

Sol 2: Desdoblar la ec. de la recta continua en 2 implícitas y hacer un sistema con la ec del plano:

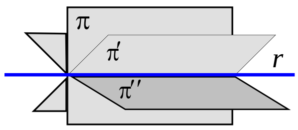
2x-y =0 ; 4x -z -2 =0 ; 2x + 4y -z =-4 como $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ → Corta al plano

4.- Halla la posición *relativa* de los tres planos siguientes:

$$\pi_1: 2x - y + 3z = 11$$
$$\pi_2: x + y - z = 6$$
$$\pi_3: x - 5y + 9z = 4$$

Sol: Podemos hacerlo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 11 \\ 1 & -5 & 9 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -6 & 10 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



rang(M)=rang(M*)=2

Rang(M) = Rang(M*) = 2 → Compatible indeterminado → Planos secantes. Los tres planos se cortan en una recta.

5.- Dadas las rectas $r\colon \frac{x}{3} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{1}$ y $s\colon (x,y,z) = (2,1,1) + \lambda(3,-1,3)$, encuentra el plano que pasa por *r* y paralelo a *s*.

Solución:

Utilizamos el punto de la recta r y los vectores de cada una de las dos rectas:

$\begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3(y-1) - 3z + 3x - 9(y-1) = 0$ simplificando obtenemos: $x - 6y - 3z + 6 = 0$

Opción 2: Otra opción sería hacer el producto vectorial de los vectores directores de las rectas para obtener un vector asociado al plano, que coincidirá con los coeficientes A, B y C de la ec. general del plano. Luego, sustituir el punto para obtener el coeficiente D.

6.- Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A(2, -1, 0) y se apoya en las rectas

$r\colon \begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$ $s\colon \frac{x}{3} = y + 2 = 1 - z$

Solución:

Plano que pasa por A y contiene a la recta r: $x - y + 3z - 4 + \alpha(x - y + z - 2) = 0$ (Haz de planos)

Y como pasa por A(2,-1, 0), $2 + 1 - 4 + \alpha(2 + 1 - 2) = 0 \Rightarrow \alpha = 1$, por tanto,

$x - y + 3z - 4 + 1(x - y + z - 2) = 0$, es decir, $x - y + 2z - 3 = 0$

Plano que pasa por A y contiene a s: Expresamos primeramente la recta s en forma implícita: $s\colon \begin{cases} x - 3y - 6 = 0 \\ x + 3z - 3 = 0 \end{cases}$

$x - 3y - 6 + \alpha(x + 3z - 3) = 0$ Y como pasa por A(2,-1, 0), $2 + 3 - 6 + \alpha(2 - 3) = 0 \Rightarrow \alpha = -1$, por tanto,

$x - 3y - 6 - 1(x + 3z - 3) = 0$, es decir, $\Rightarrow y + z + 1 = 0$

La recta pedida viene dada como intersección de los dos planos obtenidos: $\begin{cases} x - y + 2z - 3 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$

7.- Calcula ***k*** para que se corten las siguientes rectas y averigua en qué punto lo hacen:

$r\colon \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x - 5y - z = -1 \end{cases}$ $s\colon \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + y + \boldsymbol{k}z = 5 \end{cases}$

Solución: Necesitamos el vector y el punto de cada recta: Podríamos cambiar z por λ o podemos simplificar primero:

Ecuaciones paramétricas de la recta r: $\left.\begin{matrix} x + 2y + z = 3 \\ x - 5y - z = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x - 3y = 2$. Si hacemos y = 2λ, x = 1 + 3λ

Sustituyendo en la 1ª ecuación, z = 2 – 7λ, por tanto: $r\colon \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 - 7\lambda \end{cases}$

Ecuaciones paramétricas de la recta s: $\left.\begin{matrix} 2x + y = 2 \\ x + y + kz = 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -x + kz = 3$. Si hacemos z = μ, $x = -3 + k\mu$

Sustituyendo en la 1ª ecuación, $y = 8 - 2k\mu$, por tanto, $s\colon \begin{cases} x = -3 + k\mu \\ y = 8 - 2k\mu \\ z = \mu \end{cases}$

Un punto y un vector de la recta r: $P(1,0,2)$; $u = (3,2,-7)$

Un punto y un vector de la recta s: $Q(-3,8,0)$; $v = (k,-2k,1)$

Hallamos el vector que une los dos puntos: $\overrightarrow{PQ} = (-4,8,-2)$

Finalmente, igualamos a cero el determinante formado por los tres vectores: $\begin{vmatrix} -4 & 8 & 2 \\ 3 & 2 & -7 \\ k & -2k & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Resolviendo la ecuación se obtiene k = 2.

El punto de intersección lo podemos obtener igualando las dos ecuaciones y resolviendo el sistema formado:

$r\colon \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 - 7\lambda \end{cases}$ $s\colon \begin{cases} x = -3 + 2\mu \\ y = 8 - 4\mu \\ z = \mu \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 1 + 3\lambda = -3 + 2\mu \\ 2\lambda = 8 - 4\mu \\ 2 - 7\lambda = \mu \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} 3\lambda - 2\mu = -4 \\ 2\lambda + 4\mu = 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 6\lambda - 4\mu = -8 \\ 2\lambda + 4\mu = 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda = 0$

El punto de corte se obtiene llevando el valor de λ obtenido a la ecuación de la recta r: Punto de corte: **(1, 0, 2)**

8.- Consideremos las rectas de ecuaciones

$r: \begin{cases} x+y-z+3=0 \\ -2x+z-1=0 \end{cases}$ s: $x+1=\frac{y-3}{n}=\frac{z}{2}$

a) Halla n para que r y s sean paralelas.

b) Con el valor de n obtenido, determina la ecuación del plano que contiene ambas rectas.

Solución:

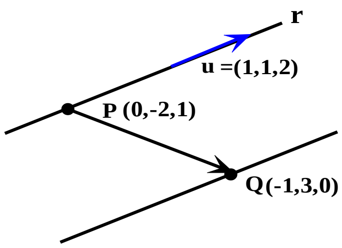
a) Expresaremos la recta r en paramétricas:

$r: \begin{cases} x+y-z+3=0 \\ -2x+z-1=0 \end{cases} \Rightarrow y-x+2=0 \Rightarrow y=-2+x$

Si hacemos $x=\lambda$, $y=-2+\lambda$

Sustituyendo en la 2ª ecuación, $z=1+2\lambda$

La recta r queda de la siguiente forma: $r: \begin{cases} x=\lambda \\ y=-2+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$



Por otra parte, sabemos que s:$x+1=\frac{y-3}{n}=\frac{z}{2}$

Además, un vector de r es $u=(1,1,2)$ y un vector de s es $v=(1,n,2)$

Para que las rectas sean paralelas sus vectores directores tienen que ser proporcionales, por tanto $\frac{1}{1}=\frac{1}{n}=\frac{2}{2} \Rightarrow n=1$

b) El plano que contiene a las dos rectas, queda determinado por el punto P y los vectores u y $\overrightarrow{PQ}=(-1,5,-1)$

Su ecuación se obtiene a partir de un determinante: $\begin{vmatrix} x & y+2 & z-1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \end{vmatrix}=0$

Desarrollando el determinante y simplificando, obtenemos la ecuación siguiente: $11x+y-6z+8=0$

9.- Halla el valor del parámetro a para que los planos siguientes se corten en una recta.

$$\pi_1: x-y+z=2$$
$$\pi_2: 2x-y+z=3$$
$$\pi_3: 3x-y+az=4$$

Determina la ecuación de la recta mencionada en coordenadas paramétricas.

Solución:

Podemos aplicar el método de Gauss:

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & a & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & a-3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$

Para que se corten en una recta se ha de verificar que $rang(M)=rang(M*)=2$ y ello se verifica si $a-1=0$, es decir, cuando a = 1.

Cuando a = 1, el sistema queda de la siguiente forma:

$\left.\begin{matrix} x-y+z=2 \\ y-z=-1 \end{matrix}\right\}$ y si hacemos $z=\lambda$, resulta $\left.\begin{matrix} x-y=2-\lambda \\ y=-1+\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=1$ → recta intersección: $r: \begin{cases} x=1 \\ y=-1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

10.- Sea la recta de ecuación $\frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-3}{2}$ y el plano $4x+my+z-2=0$

Halla el valor de ***m*** para que sean paralelos.

__Método__ 1: La ecuación de la recta podemos ponerla en la forma siguiente:

$r: \begin{cases} 4x-4=2y+10 \\ 2y+10=4z-12 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} 2x-y=7 \\ y-2z=-11 \end{cases}$

Para que la recta y el plano sean paralelos, el sistema ha de ser incompatible. SI: $\begin{cases} 2x-y=7 \\ y-2z=-11 \\ 4x+my+z=2 \end{cases}$

Hacemos que el rango de la matriz de coeficientes sea 2: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 4 & m & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 2+8+4m=0 \Rightarrow m=\frac{-5}{2}$

Como podemos encontrar un determinante de orden 3 distinto de cero, el rango de la matriz ampliada es 3, es decir, $rang(M)=2; rang(M*)=3$ (Sistema incompatible) → La recta y el plano son paralelos.

__Método__ 2: Sea $\pi: Ax+By+Cz+D=0$; $r: \frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2}=\frac{z-z_0}{v_3}$

De condición de paralelismo recta-plano: $Av_1+Bv_2+Cv_3=0$, por tanto: $4.2+m.4+1.2=0$→ $m=\frac{-5}{2}$

DISTANCIAS Y ÁNGULOS EN EL ESPACIO

Vector perpendicular a un plano

- En un plano π ($Ax + By + Cz + D = 0$), su vector asociado ***n*** (*A*, *B*, *C*) es perpendicular al plano.
- Dados dos puntos cualesquiera del plano: P_1 y P_2, el producto escalar del vector $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot n = 0$ es nulo.

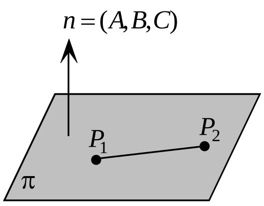
Ejemplo: Ecuación del plano que pasa por P(2, 1, 3) y es perpendicular al vector $v = (-1,3-2)$

El plano buscado será $-1x + 3y - 2z + D = 0$

Sustituimos el punto P(2, 1, 3) en la ecuación para obtener D:

$(-1).2 + 3.1 + (-2).3 + D = 0$, es decir, D = 5.

luego la ecuación del plano será : $-x + 3y - 2z + 5 = 0$



Ángulos

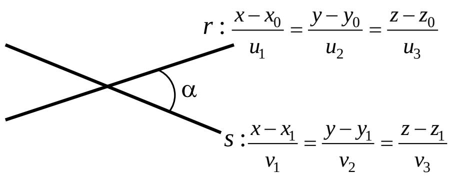
Ángulo formado por dos rectas

Ángulo de dos rectas es el menor de los ángulos formados por sus respectivos vectores de dirección.

De la definición de producto escalar, se obtiene:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \frac{|u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}.$$

Tomamos el valor absoluto para obtener el ángulo menor.



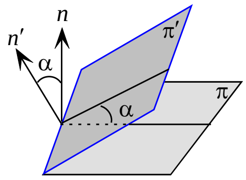
Ángulo formado por dos planos

Dos planos $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ y $\pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$,

El ángulo más pequeño que forman es igual o suplementario al que forman sus vectores asociados normales:

$\vec{u}$ = (A,B,C) y $\vec{v}$ = (A',B',C') (tomar el valor absoluto a fin de obtener el menor de los ángulos)

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|u|.|v|} = \frac{|A.A' + B.B' + C.C'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$



Ejemplos:

*1. Calcula el ángulo que formado por las **rectas** r y s siendo:*

$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{5}$; $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$

Los vectores de dirección de las respectivas rectas son $\vec{u}$ = (1,-1,5) y $\vec{v}$ = (2,1,-1) por tanto,

$\cos\alpha = \frac{|1.2+(-1).1+5.(-1)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+5^2}.\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{|2-1-5|}{\sqrt{27}\sqrt{6}} = \frac{4}{9\sqrt{2}}$ → **α = 71,68º**

*2. Calcula el ángulo que forman los **planos*** $\pi_1: 2x - y - 3 = 0$; $\pi_2: x + y - z = 0$

Los vectores perpendiculares a cada uno de los planos son: $\vec{u}$ = (2,-1,0) y $\vec{v}$ = (1,1,-1) por tanto,

$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{|u|.|v|} = \frac{|2-1+0|}{\sqrt{5}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$ → **α = 75,03º**

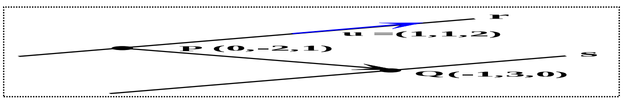
Ángulo formado por una recta y un plano

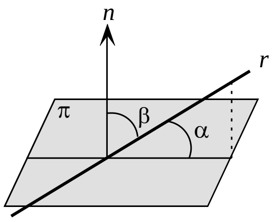
La recta forma un ángulo β complementario con el vector normal al plano.

α = 90 - β (complementarios) o $sen\alpha = \cos\beta$

V. normal: $n = (A, B, C)$

V director: $v = (v_1, v_2, v_3)$





Ejemplo:

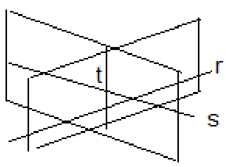
Calcula el ángulo que forma la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-1}$ con el plano de ecuación $x + 3y + z - 5 = 0$

Vector perpendicular al plano: n = (1, 3, 1)

Vector director de la recta v = (1, 2, -1)

$$sen\alpha = \cos\beta = \frac{|1\cdot 1 + 3\cdot 2 + 1\cdot(-1)|}{\sqrt{1+9+1}\sqrt{1+4+1}} = \frac{|1+6-1|}{\sqrt{11}\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{66}} \to \alpha = 47{,}6°$$

Recta perpendicular común a dos rectas que se cruzan:



Método 1: La recta perpendicular común ***t*** es la *intersección* de dos planos π1 y π2.

π1contiene a las rectas ***r*** y ***t*** (vector perpendicular a ***r*** i ***s***) → producto vectorial y un punto de ***r***.

π2 contiene a ***s*** y ***t*** (producto vectorial vector de ***s*** con ***t*** (vector perpendicular) y un punto de ***s***.

Método 2: Determinemos los puntos P y Q de mínima distancia entre ambas rectas, puntos de intersección de la perpendicular común t con las rectas r y s, respectivamente

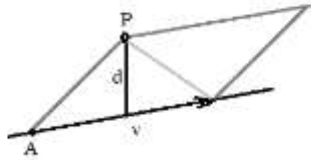
Distancias

Distancia entre dos puntos

Es el módulo del vector que une dichos puntos: $d(A,B)=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$

Ejemplo: Distancia entre los puntos A(1, 3, 0) y B(–1, 2, 3): $d(A,B)=\sqrt{(-1-1)^2+(2-3)^2+(3-0)^2}=\sqrt{14}$

Distancia de un punto a una recta



A partir de un punto arbitrario de la recta, ***A*** y su vector director ***v***:

Método 1: Es la altura del área del paralelogramo, obtenido del producto vectorial

Área paralelogramo = |producto vectorial| = base x altura

distancia = |producto vectorial| / |módulo de v|	-> $\boxed{d=\frac{\|\overrightarrow{AP}\times v\|}{\|v\|}}$

Método 2: Es la altura del área del triángulo: $Area\ triang=\frac{base\times altura}{2}=\frac{d\cdot|v|}{2}\to \mathrm{d}=\frac{2\mathrm{A}}{|v|}$

Método 3: Calculando la distancia entre P y el punto de intersección de una recta perpendicular que pase por P, con r.

Método 4: Usando un plano auxiliar π perpendicular a *r* que pase por P y hallar su intersección con r.

Ejemplo:

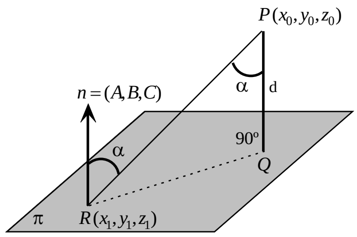
Halla la distancia del punto P(1, –2, 2) a la recta dada por las siguientes ecuaciones paramétricas: $\begin{cases}x=2-\lambda\\ y=1+2\lambda\\ z=-1-\lambda\end{cases}$

Un punto de la recta es: A(2, 1, –1) → vector $\overrightarrow{AP}$ = (-1, -3, 3) ; Vector director de la recta: $\vec{v}$ = (–1, 2, –1)

Producto vectorial: $\overrightarrow{AP}\times\vec{v}=\left(\begin{vmatrix}-3 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & -3\\ -1 & 2\end{vmatrix}\right)=(-3,-4,-5)$; Módulo de $|\vec{v}|=\sqrt{6}$

Altura o distancia más corta: $d(P,r)=\frac{\sqrt{(-3)^2+(-4)^2+(-5)^2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{50}{6}}=\sqrt{\frac{25}{3}}$

Distancia de un punto a un plano



Dado el plano π: $\mathrm{Ax}+\mathrm{By}+\mathrm{Cz}+D=0$ y el punto P

Método 1: Como el vector asociado $n=(A,B,C)$ es perpendicular al plano.

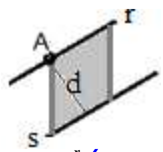
$$\boxed{d(P,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

Método 2: Es la distancia entre el punto P y su proyección ortogonal en el plano Q

Ejemplo: Calcula la distancia del punto P(1, 2, –1) al plano $2x-y+2z+3=0$

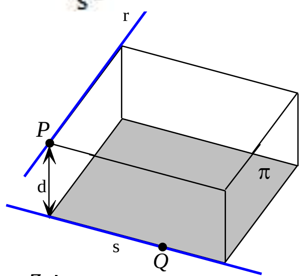
$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|2.1-1.2+2(-1)+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3}$$

Distancia entre dos rectas paralelas



Es la distancia de un punto cualquiera (***A***) de la recta (***r***) a la otra recta (***s***)

usando la fórmula: d = área paralelogramo/ base → $\boxed{d(r,s)=d(A,s)=\frac{|\overrightarrow{AB}\times v|}{|v|}}$



Distancia entre dos rectas que se cruzan (*mínima*)

Sean: r: $\frac{x-x_0}{u_1}=\frac{y-y_0}{u_2}=\frac{z-z_0}{u_3}$; s: $\frac{x-x_1}{v_1}=\frac{y-y_1}{v_2}=\frac{z-z_1}{v_3}$

- ***Método del plano paralelo que contiene a una recta:***

a. Hallamos la ecuación del plano π que contiene a la recta *s* y es paralelo a la recta *r*

por lo que utilizaremos el punto Q y los vectores de las dos rectas: $\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=0$

b. Después hallamos la distancia de un punto $P(x_0,y_0,z_0)$ de la otra recta *r* al plano π

- ***Método del volumen del paralepípedo.***

Distancia= Volumen paralepípedo/ área del paralelogramo de la base

Distancia = producto mixto / producto vectorial → $\boxed{d(r,s)=\frac{V}{A}=\frac{|\overrightarrow{AB}\times u\times v|}{|u\times v|}}$

- ***Método de la recta perpendicular común:*** Con la recta perpendicular común, se busca los puntos de intersección

Distancia entre plano y recta paralela

Es la distancia de un punto de la recta A al plano π.

Distancia entre planos paralelos:

π_1: $\mathrm{Ax}+\mathrm{By}+\mathrm{Cz}+D_1=0$ y π_2: $\mathrm{Ax}+\mathrm{By}+\mathrm{Cz}+D_2=0$ → $\boxed{d=\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$

Ejemplo:

Posición relativa comprobando que se cruzan y distancia mínima de las rectas r: $\begin{cases} x = 5+\lambda \\ y = -1 \\ z = 8+2\lambda \end{cases}$ *y* s: $\begin{cases} x = 2+3\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = -1+4\lambda \end{cases}$

de r: un punto P(5, –1, 8) y un vector $\vec{u}$ = (1, 0, 2)

de s: un punto Q(2, 2, –1) y un vector $\vec{v}$ = (3, –1, 4) ; Vector $\overrightarrow{PQ} = (-3, 3, -9)$

Producto mixto:

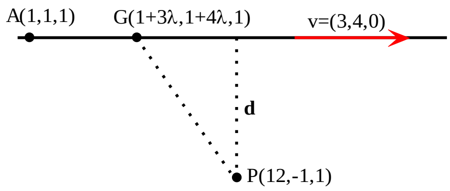
$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ -3 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 9+18-6-12 = 9 \neq 0$, →se cruzan. $\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z+1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$ → Plano: 2x + 2y –z + 9 = 0

Distancia del punto (5, –1, 8) al plano hallado: $d = \frac{|2.5+2(-1)-8+9|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{9}{3} = 3$

Ejercicios resueltos

1.- Halla la distancia del punto P(12,-1,1) a la recta r que pasa por A(1,1,1) y tiene como vector de dirección al vector v = (3,4,0)

Método 1:



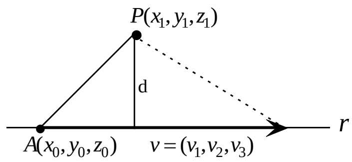
Ecuación de la recta r: $\begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = 1+4\lambda \\ z = 1 \end{cases}$

G (x,y,z) punto genérico de la recta.

Para que $\overrightarrow{PG}$ sea un vector perpendicular a la recta, ha de cumplir que $\overrightarrow{PG} \cdot v = 0 \Rightarrow (1+3\lambda, 1+4\lambda, 1) \cdot (3,4,0) = 0$ (**producto escalar** nulo) y se obtiene λ = 1 y el vector perpendicular a la recta será, por tanto, $\overrightarrow{PG} = (-8,6,0)$

la distancia buscada es el módulo del vector $\overrightarrow{PG}$: $d = \sqrt{(-8)^2+6^2+0^2} = \mathbf{10}$

Método 2:



Con la fórmula: $d = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$ donde A(1,1,1), P(12,-1,1) →$\overrightarrow{AP}$=-11,2,0 y $\vec{v}$ = (3,4,0)

$|\vec{v}| = \sqrt{9+16} = 5$; $|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}|$ = 50 → d= 50/5 = **10**

2.- Determina las ecuaciones vectorial, paramétricas y general del plano determinado por los puntos A(1,0,0), B(2,-1,2) y C(5,-1,1). Halla la distancia del punto P(2,7,3) al plano hallado.

Solución:

Elegimos, por ejemplo, el punto A(1,0,0) y formamos los vectores $\overrightarrow{AB} = (1,-1,2)$ y $\overrightarrow{AC} = (4,-1,1)$

Ecuaciones paramétricas: π: $\begin{cases} x = 1+1\lambda+4\mu \\ y = 0-1\lambda-1\mu \\ z = 0+2\lambda+1\mu \end{cases}$ Ecuación general: $\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Desarrollando el determinante se obtiene $\pi: x+7y+3z-1 = 0$

La distancia del punto P(2,7,3) al plano hallado, se obtiene aplicando la fórmula

$$d(P,\pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|1\cdot 2+7\cdot 7+3\cdot 3-1|}{\sqrt{1^2+7^2+3^2}} = \frac{59}{\sqrt{60}}$$

3.- Determina un punto P de la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$

que equidiste de los planos $\pi_1: x+y+z+3 = 0$ y π_2: $\begin{cases} x = -3+\lambda \\ y = -\lambda+\mu \\ z = -6+\mu \end{cases}$

Solución:

Expresamos el plano π_2 en forma cartesiana:

$$\begin{vmatrix} x+3 & y & z+6 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_2: x+y-z-3 = 0$$

Pasando a paramétricas la recta, obtenemos un punto genérico: $P(1+2\lambda, -1+\lambda, 3\lambda)$

Como $d(P,\pi_1) = d(P,\pi_2)$, resulta:

$\frac{|1.(1+2\lambda)+1.(-1+\lambda)+1.3\lambda+3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{|1.(1+2\lambda)+1.(-1+\lambda)-1.3\lambda-3|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}$

con lo que se obtiene $\frac{|6\lambda+3|}{\sqrt{3}} = \frac{|-3|}{\sqrt{3}}$, es decir, $|6\lambda+3| = 3 \Rightarrow \begin{cases} 6\lambda+3 = 3 \\ -6\lambda-3 = 3 \end{cases}$

De la primera ecuación obtenemos $\lambda = 0$ y de la segunda $\lambda = -1$

Llevando los valores de λ al punto genérico obtenemos dos puntos que equidistan de los planos dados: $P(-1,-2,-3)$ y $P'(1,-1,0)$

4.- dado el plano π de ecuación $x + 2y + 3z - 1 = 0$, la recta r de ecuación $r: \begin{cases} x = 2z - 3 \\ y = z + 4 \end{cases}$ y el punto P(2,1,1), calcula:

a) Ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a π

b) Ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r

Solución:

a) El vector característico del plano es un vector director de la recta, es decir, $v = (1,2,3)$

Y teniendo en cuenta que la recta pasa por P(2,1,1): $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$

b) En la recta r, hacemos $z = \lambda$ y queda de la siguiente forma: $r: \begin{cases} x = -3 + 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

El vector director de la recta es un vector característico del plano buscado.

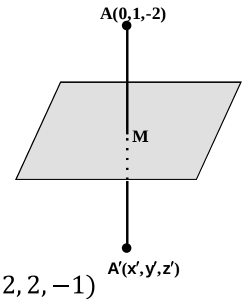
$$2x + y + z + D = 0$$

Como el plano contiene al punto P(2,1,1), $2.2 + 1 + 1 + D = 0 \Rightarrow$ D = -6

Ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r: $2x + y + z - 6 = 0$

5.- Halla el **simétrico** del punto A(0,1,-2) respecto al plano de ecuación $\pi: 2x - y - z + 5 = 0$

Solución:



Vector normal del plano: $n = (2, -1, -1)$ será el vector director de la recta que pasa por A:

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{-1} = \lambda$$

Ec paramétrica recta: $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$

Ec plano: $\pi: 2x - y - z + 5 = 0$

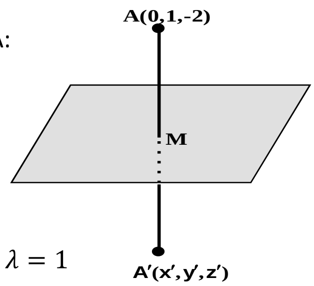
La intersección de la recta y el plano nos da las coordenadas del punto M:

$2 \cdot 2\lambda - (1 - \lambda) - (-2 - \lambda) + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$ -> Sustituyendo λ en la ecuación de la recta: $M(-2, 2, -1)$

El punto M es el punto medio del segmento AA': **Mx** = (Ax + A'x)/2 ; **My** = (Ax + A'y) /2 ; **Mz** = (Az + A'z) / 2

$\frac{0+x'}{2} = -2 \Rightarrow x' = -4$ $\quad \frac{1+y'}{2} = 2 \Rightarrow y' = 3$ $\quad \frac{-2+z'}{2} = -1 \Rightarrow z' = 0$ -> Punto simétrico $\boldsymbol{A'(-4, 3, 0)}$

6.- Halla el **simétrico** de A(2,0,1) respecto de la recta $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{1}$



Buscamos la intersección M mediante un plano perpendicular a la recta y que pase por A:

Como tienen el mismo vector: $2x - y + z + D = 0$

Como dicho plano contiene al punto A: $2 \cdot 2 + 1 + D = 0 \Rightarrow$ D = - 5

El plano tiene de ecuación π: $2x - y + z - 5 = 0$

Ecuación de la recta dada en paramétricas: $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{1} = \lambda \Rightarrow \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$

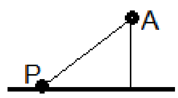
La intersección de la recta y el plano nos da el punto M: $4\lambda - 3 + \lambda + 2 + \lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

Llevando λ a la recta obtenemos: $M(4,2,3)$

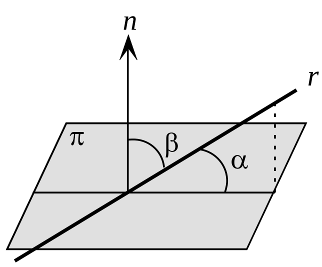
Como M es el punto medio de A y A', aplicamos las fórmulas del punto medio:

$\frac{2+x'}{2} = 4 \Rightarrow x' = 6$ $\quad \frac{0+y'}{2} = 2 \Rightarrow y' = 4$ $\quad \frac{1+z'}{2} = 3 \Rightarrow z' = 5$ → Simétrico: $A'(6,4,5)$

Opción 2: hallar el vector perpendicular desde la proyección de un punto cualquiera de la recta hasta A y que sea perpendicular.



7.- Determina el **ángulo** que forman el plano $\pi: x + 2y - 3z + 4 = 0$ y la recta $r: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x + 2z = 12 \end{cases}$



Solución:

Aplicamos la fórmula $sen\alpha = \frac{|n.v|}{||n||.||v||}$ donde $n = (A, B, C)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$

En primer lugar ponemos la recta en paramétricas:

$r: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x + 2z = 12 \end{cases} \Rightarrow y = 2x$, haciendo $x = \lambda, y = 2\lambda$

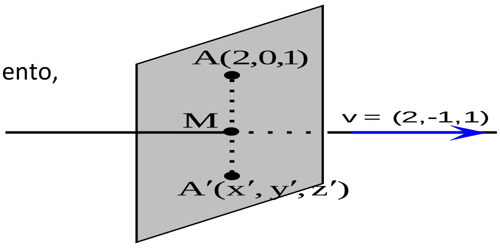
Y de la 2ª ecuación obtenemos z: $6\lambda + 2z = 12 \Rightarrow z = 6 - 3\lambda$

La recta r queda de la siguiente forma: $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 6 - 3\lambda \end{cases}$ donde $v = (1,2,-3)$

Y como $n = (1,2,-3)$ → $sen\alpha = \frac{|n.v|}{||n||.||v||} = \frac{|1+4+9|}{\sqrt{1+4+9}.\sqrt{1+4+9}} = 1 \Rightarrow \alpha = arcsen1 = 90º$

8.- Dos vértices consecutivos de un paralelogramo son A(1,1,1) y B(0,2,0). El centro del paralelogramo es O (0,0,1).
Se pide:
a) Las coordenadas de los otros dos vértices.
b) Ecuación del plano que contiene al paralelogramo
c) Área del paralelogramo.

Solución:



a) Aplicando las fórmulas de las coordenadas del punto medio de un segmento,
$\frac{1+x_1}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = -1$; $\frac{1+y_1}{2} = 0 \Rightarrow y_1 = -1$; $\frac{1+z_1}{2} = 1 \Rightarrow z_1 = 1$
Las coordenadas de C son: $C(-1,-1,1)$
Del mismo modo obtenemos: $D(0,-2,2)$

b) Ecuación del plano: $\overrightarrow{OA} = (1,1,0)$; $\overrightarrow{OB} = (0,2,-1)$
Con el punto O y los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ podemos escribir su ecuación:
$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - y - 2z + 2 = 0$$

d) El área del paralelogramo: $Área = |\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB}|$ como $\overrightarrow{AD} = (-1,-3,1)$ y $\overrightarrow{AB} = (-1,1,-1)$
$$\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB} = \left(\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (2,-2,-4) \rightarrow Área = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-4)} = \sqrt{24}\ \mathrm{u}^2$$

9.- Halla la ecuación del plano π que es perpendicular a $\pi_1: x - 6y + z = 0$ y contiene a la recta intersección de los planos:
$\pi_2: 4x - 2y + z = 2$ y $\pi_3: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 + \lambda + \mu \\ z = 1 + \lambda + 2\mu \end{cases}$

Solución: Ecuación general de π_3: $\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 2y + z + 1 = 0$

$\pi_2 \cap \pi_3: \begin{cases} 4x - 2y + z - 2 = 0 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$ que pasamos a paramétricas resolviendo el sistema: $\begin{cases} 4x - 2y + z - 2 = 0 \\ -x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$
Sumando se obtiene $x = 1$

Sustituyendo en una de las dos ecuaciones resulta $z = 2y - 2$ y haciendo y = λ: $\pi_2 \cap \pi_3: \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$

Un punto del plano buscado puede ser el de la recta intersección: (1,0,-2)
Los dos vectores que necesitamos serán:
- El vector director de la recta intersección: $v = (0,1,2)$
- El vector característico del plano π_1: $w = (1,-6,1)$

Ecuación del plano π:
$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 13x + 2y - z - 15 = 0$$

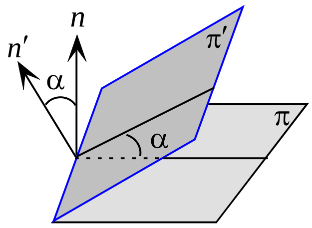
10.- Halla la ecuación del plano π que es perpendicular a los planos $\pi_1: 2z + 3y + z = 1$, y $\pi_2: 6x + 3y + 2z = 3$ sabiendo que pasa por el punto A(4,1,2).

Solución: Para determinar un plano necesitamos:
- Un punto
- Dos vectores paralelos al plano y no paralelos entre sí.

El punto lo tenemos.
Los vectores característicos de π_1 y π_2, $v = (2,3,1)$ y $w = (6,3,2)$, son paralelos al plano y no paralelos entre sí. Por tanto,
$$\begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z-2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$
Desarrollando el determinante: $6(x-4) + 6(y-1) + 6(z-2) - 18(z-2) - 3(x-4) - 4(y-1) = 0$,
es decir, π: $3x + 2y - 12z + 10 = 0$

11.- Determina una constante a, para que el plano de ecuación $ax + y + z = 2$ forme un ángulo de π/3 radianes con el plano z = 0

Solución:



Un vector característico del plano $ax + y + z = 2$ es $n = (a, 1,1)$

Un vector característico del plano z = 0, es $n^{'} = (0,0,1)$

Aplicando la fórmula $cos\ \alpha = \frac{|n.n^{'}|}{||n||.||n^{'}||}$ resulta:

$cos\frac{\pi}{3} = \frac{|a.0+1.0+1.0|}{\sqrt{a^2+1^2+1^2}\sqrt{0^2+0^2+1^2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+2}} \Rightarrow \sqrt{a^2+2} = 2$

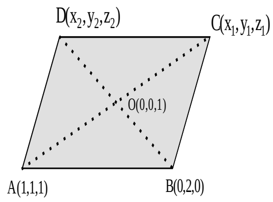
Elevando al cuadrado, $a^2 + 2 = 4 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2}$

12.- dadas las rectas $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1};\ s: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$

a) Halla la distancia entre las dos rectas

b) Determina la ecuación de la perpendicular común a las dos rectas.

Solución:



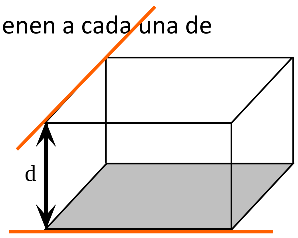
a) Plano que contiene a la recta s y es paralelo a r: (zona sombreada)

$\begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z-1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + 4y - z + 12 = 0$

Un punto de la recta r es P(2,1,0)

Ahora calculamos la distancia del punto P al plano hallado: $d = \frac{|6+4+12|}{\sqrt{3^2+4^2+(-1)^2}} = \frac{22}{\sqrt{26}}$

b) la perpendicular común podemos expresarla por la intersección de los dos planos que contienen a cada una de las dos caras sombreadas:



$v = 3, -2,1)$ es un vector director de r

$w = (2, -1,2)$ es un vector director de s

El vector $v \times w$ es perpendicular a cada uno de los vectores dados:

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3i - 4j + k = (-3, -4,1) \rightarrow \pi_1: \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0;$

$\pi_2: \begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z-1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Ejercicios propuestos con solución:

Parte 1

1.- Halla el valor de m para que los puntos $A(1,2,0)$, $B(0,3,-1)$, $C(1,0,1)$ y $D(-1,2,m)$ sean coplanarios.

Sol. m = – 1

2.- Calcula el volumen del tetraedro determinado por los puntos $A(-1,0,1)$, $B(2,-4,0)$, $C(1,1,1)$ y $D(-3,0,0)$

Sol. $V=\frac{3}{2}\ \mathrm{u}^3$

3.- Estudia la posición relativa de las rectas $r{:}\ \frac{x-2}{-3}=\frac{y-3}{5}=\frac{z}{1}$; $s{:}\begin{cases}x=1-t\\y=2t\\z=5\end{cases}$

Sol. Se cortan en el punto (-3,28,5)

4.- Halla la ecuación de un plano paralelo al plano de ecuación $x-2y+z+5=0$ y que pase por el punto P(1, 0, 8)

Sol. $x-2y+z-9=0$

5.- Calcula el área del triángulo cuyos vértices son las intersecciones del plano $x+2y+3z=1$ con los ejes de coordenadas.

Sol. $A=\frac{\sqrt{14}}{12}\ \mathrm{u}^2$

6.- Estudia la posición relativa de la recta $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-1}$ y el plano de ecuación $2x-y+3z-8=0$

Sol. La recta y el plano son paralelos

7.- Estudia la posición relativa de los siguientes planos:

$$\pi_1{:}\ -x-2y+3z-5=0$$
$$\pi_2{:}\ 2x+4y-6z-1=0$$
$$\pi_3{:}\ 3x+2y-4z+6=0$$

Sol. π_1 y π_2 son paralelos. El tercero es secante a los otros dos.

8.- Escribe la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a la recta cuyas ecuaciones paramétricas son $r{:}\begin{cases}x+y+z=1\\x-y=2\end{cases}$

9.- Halla m para que las rectas $r{:}\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{-3}=\frac{z+1}{2}$ $s{:}\ \frac{x}{4}=\frac{y-m}{-1}=\frac{z-1}{2}$ sean secantes.

Sol. m = 11

10.- Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos A(5, 0, 1), B(4, 1, 0) y es paralelo a la recta $\begin{cases}x-2y+3z=0\\2x+y-z=5\end{cases}$

Sol. $2x+y-z-9=0$

11.- Un plano contiene a las rectas $r{:}\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{1}$ y $s{:}\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{2}$. Halla su ecuación.

Sol. $2x-y-z+3=0$

12.- Dada una recta r, de ecuación $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{4}$, halla:

a) Las ecuaciones de dos planos que determinan r.
b) En el haz formado por los planos que determinan r, halla el que pasa por el punto $A(0,-3,2)$

Sol. $\begin{cases}2x-3y+7=0\\2y-z-2=0\end{cases}$; $10x+y-8z+19=0$

13.- Halla la ecuación de la recta t, que pasa por el punto A(1, 0, -2) y corta las rectas siguientes:

$$r{:}\ \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1};\quad s{:}\ \frac{x}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{3}$$

Sol. $t{:}\begin{cases}x+y-1=0\\x-2y-1=0\end{cases}$

Parte 2. Distancias y ángulos

1.- Estudia si las rectas $r:\begin{cases}x=1-t\\y=1-t\\z=2\end{cases}$ $s:\begin{cases}x=t\\y=1+t\\z=2-t\end{cases}$ se cruzan o se cortan en el espacio. Encuentra la distancia entre ellas.

Solución: Escogemos un punto y un vector de cada recta.
Como el determinante formado por el vector que uno los puntos de ambas rectas y los vectores directores es distinto de cero, las rectas se cruzan. Distancia entre r y s: $\sqrt{2}$

2.- Se dan las rectas $r:\begin{cases}x-2y=-1\\y-z=1\end{cases}$ $s:\begin{cases}x-2z=5\\x-y-z=1\end{cases}$

a) Investiga si son paralelas.
b) En caso afirmativo, halla la ecuación del plano que las contiene

Solución:
Hacemos $z=\lambda$ y las expresamos en paramétricas.
a) Las rectas son paralelas porque los vectores directores son proporcionales y los puntos no satisfacen
b) Escogemos un punto de cada recta y formamos el vector que une ambos puntos.
Con dicho vector, un vector director de una de ellas y uno de los dos puntos que conocemos, escribimos la ecuación del plano: $3x-4y-2z+1=0$

3.- Determina las coordenadas del punto <u>simétrico</u> de A(-3,1,-7), respecto de la recta $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{2}$
Solución:
Hallamos un plano perpendicular a la recta que pasa por A.
A continuación, buscamos la intersección de la recta y el plano. El punto de intersección es el punto medio de A y su simétrico A' $A'(-3,-3,-3)$

4.- Las rectas $\frac{x}{-1}=\frac{y}{-4}=\frac{z}{0}$ y $\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$, se cruzan en el espacio. Calcula la distancia entre ellas y la ecuación de la recta perpendicular común a ambas rectas.

Solución: $d=\sqrt{\frac{14}{3}}$ Recta perpendicular común: $\begin{cases}x=-4\lambda\\y=\lambda\\z=5\lambda\end{cases}$

5.- Halla la distancia entre las rectas $r:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{1}$; $s:\frac{x-5}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{2}$
Solución: $\sqrt{3}$

6.- Comprueba que la recta $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-7}{-1}$ es paralela al plano $x+2y+3z=0$ y halla la distancia de la recta al plano.

Solución: El producto escalar del vector director de la recta y del vector característico del plano ha de ser nulo. (Condición de paralelismo de recta y plano) $d=\frac{14}{\sqrt{3}}$

7.- Halla la recta que pasa por A(1,0,2) y es paralela a los planos $x-2y+3z+1=0$ y $2x-3y+z+6=0$

Solución: $\frac{x-1}{7}=\frac{y}{5}=\frac{z-2}{1}$

8.- Las rectas $r:\begin{cases}x+y-z=4\\x+2y=7\end{cases}$ $s:\begin{cases}x=2\\y=-4\end{cases}$ *se cruzan en el espacio.*
Escribe las ecuaciones paramétricas de ambas rectas.
Halla un punto de r y otro punto de s tales que el vector con origen en uno y extremo en el otro, sea perpendicular a ambas rectas.

Solución:
a) $r:\begin{cases}x=7-2\lambda\\y=\lambda\\z=3-\lambda\end{cases}$ $:\begin{cases}x=2\\y=-5\\z=\mu\end{cases}$

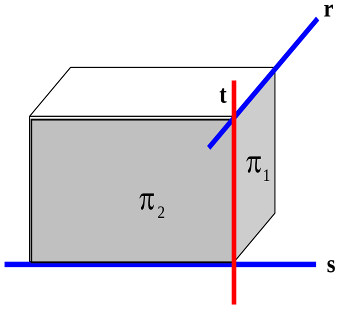
a) Tomamos un punto genérico de r y un punto genérico de s:
$P(7-2\lambda,\lambda,3-\lambda)$; $Q(2,-5,\mu)$
El vector $\overrightarrow{PQ}$ ha de ser perpendicular a cada uno de los vectores directores de las rectas dadas. (Producto escalar nulo)
Resolviendo el sistema se obtiene $\lambda=1,\mu=2$ valores que llevados a P y Q nos dan los puntos

$P(5,1,2)$ y $Q(2,-5,2)$

9.- Considera el punto P(5,-2,9) y la recta $r: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{6}$

a) Calcula la ecuación de la recta s que corta perpendicularmente a r y pasa por P.

b) Halla el punto de corte de las dos rectas.



Solución:

a) Expresamos r en paramétricas y tomamos un punto genérico de la misma:

$$G(1-2\lambda, -1-3\lambda, 6\lambda)$$

Como el producto escalar de $\overrightarrow{PG}$ y v ha de ser nulo, obtenemos λ = 1

Obtenido $\overrightarrow{PG}$, la ecuación de la recta s será: $\frac{x-5}{-6} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-9}{-3}$

b) Punto de corte: $G(-1,-4,6)$

10.- Sea el plano $\pi: x - 2y + 4z = 12$ y el punto P(2,-1,1)

a) Calcula la distancia d entre el plano π y el punto P.

b) Halla la ecuación de un plano paralelo a π y distinto del mismo, que también diste de P la misma distancia d.

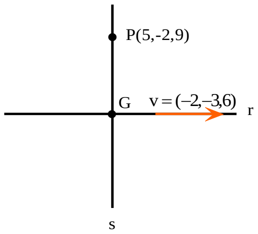
c) Calcula el volumen de la figura limitada por el plano π y los tres planos coordenados.

Solución: a) $\frac{4}{\sqrt{21}}$

b) $\pi': x - 2y + 4z - 4 = 0$

c) La coordenadas de los vértices A(12,0,0), B(0,-6,0) y C(0,0,3)

Volumen tetraedro= Vol. paralepídedo/6 = **36 u²**



PAUS – Selecat

PAUJ2011. Donada la recta: $R: \begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ X + Z + 1 = 0 \end{cases}$

a) Trobeu-ne un vector director.

b) Calculeu l'equació contínua de la recta paral·lela a rque passa pel punt P=(1, 0, −1)

Sol: a) producto vectorial = (-1,1,1) b) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$

2017: Considereu els plans π1: 5x–y–7z=1 i π2: 2x+3y+z=5.

a)Determineu l'equació general (és a dir, la que té la forma Ax+By+Cz=D) del pla que passa per l'origen de coordenades i és **perpendicular** als plans π1 i π2. b) Calculeu **l'angle** que formen els plans π1 i π2

Sol: a) el seu vector, haurà de ser perpendicular als altres. (Y si passa per l'origen, no té terme independent)

$$n = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & 5 & 2 \\ j & -1 & 3 \\ k & -7 & 1 \end{vmatrix} = (20, -19, 17) \Rightarrow 20x - 19y + 17z = D \quad \text{si passa } (0,0,0), \Rightarrow \boxed{20x - 19y + 17z = 0}$$

b) α = arccos (7-7) = arc cos(0) = 90º

2017: Siguin les rectes de ℝ3 $r: \begin{cases} 2x - y = 1 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$ i $s: x + 1 = \frac{y-2}{2} = z - 1$

a) Comproveu que són **paral·leles**.

b) Calculeu l'equació vectorial del pla que les conté.

a) La rectar *r* puesta en forma paramétrica haciendo y = λ : obtenemos el vector (½, 1 , ½) que es proporcional amb (1,2,1) y com que té punts diferents → *Rectes paral·leles*

b) Obtenemos un vector entre los puntos de cada recta. $\overrightarrow{PQ} = (-3/2, 2, 1)$ y el vector de una de las rectas(1,2,1) y un punto de cualquier recta (-1,2,1) y tenemos: (x,y,z) = (-1,2,1)+ λ(1,2,1)+μ(-3/2, 2.1)

2017: Considereu el pla π = x + y + z = 1 i la recta que passa pels punts P(0,0,6) y Q (1,2,3)

a) Estudieu la **posició relativa** de la recta r i el pla

b) Calculeu la **distància** entre la recta r i el pla.

Sol:

a) El producte escalar entre el vector normal al pla y el vector de la recta 1 + 2 – 3 = 0 → paral·lela o continguda Com P no està al pla → paral·lela.

b) Considerar un punt de la recta P (0,0,6) i calcular la seva distància al pla: $d = \frac{|1\cdot0+1\cdot0+1\cdot6-1|}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = 2{,}887\ u$

2016: A $\mathbb{R}^3$, siguin la recta r que té per equació (x, y, z)=(1+λ,λ,1–λ) i el pla π d'equació 2x–y+z = –2.

a) Determineu la posició relativa de la recta r i el pla π.

b) Calculeu la distància entre la recta r i el pla π.

Sol: a) fem el producte escalar de vector dir. de recta y asoc. pla (1,1,-1)(2,-1,1)=0 per tant vectors ortogonals → recta paral·lela al pla. Com que el punt P no satisfà l'equació del pla ,la recta queda paral·lela exterior.

mètode 2: Si fem sistema d'equacions lineals format per recta i pla → Sistema Incompatible

b) agafar un P de r y fer distancia de Punt a pla: $d(P,\pi) = \frac{|2\cdot1-1\cdot0+1\cdot1+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}} = \left|\frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}\right|$

2016J: Siguin a R^3 el pla d'equació x – y + 2z= 2 i els punts (3,-1,2) i (1,1,-2).

a) Comproveu que els punts i són simètrics respecte del pla .

b) Si és la recta dels punts de la forma en què és un paràmetre real i (), verifiqueu que els punts mitjans dels segments pertanyen al pla .

Sol: Comprovarem que el vector és perpendicular al pla i que el punt mitjà del segment pertany al pla.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 1, -4) = (1, -1, 2)$, punt mitjà del segment $M = \frac{A+B}{2} = (2, 0, 0)$

b) $P = (1, 1, -2) + \lambda(1, 1, 0) = (1 + \lambda, 1 + \lambda, -2)$ $\quad M = \frac{A+P}{2} = \frac{(4+\lambda, \lambda, 0)}{2} = (2 + \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, 0)$

2016: Siguin les rectes s $(x, y, z) = (2, 3, -3) + \lambda(1, -1, 0)$ i $s: \frac{x-3}{2} = y - 5 = z + 2$.

a) Estudieu si les rectes i són paral·leles o perpendiculars.

b)Determineu la posició relativa entre les rectes i i calculeu l'equació paramètrica de la recta que talla perpendicularment la recta i la recta .

a) els vectors directors no son proporcionals, b) Igualem les paramètriques y veiem que es tallen en (1,4, -3)

2015.- Sigui r la recta de l'espai que té per equació $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = z$ i sigui P el punt de coordenades (6, 0, -1).

a) Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma) del pla que passa pel punt P i talla perpendicularment la recta r.

b) Trobeu l'equació paramètrica del pla que passa pel punt P i conté la recta r.

a) $Q = (1, -3, 0)$ $v = (2, -1, 1) \Rightarrow 2x - y + z = D$ i si ha de passar pel punt $P = (6, 0, -1) \Rightarrow 2 \cdot 6 - 0 + (-1) = D$ i per tant $D = 11 \Rightarrow \boxed{2x - y + z = 11}$

b) $v = (2, -1, 1)$ i $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (1, -3, 0) - (6, 0, -1) = (-5, -3, 1) \Rightarrow (x, y, z) = (6, 0, -1) + \lambda(2, -1, 1) + \mu(-5, -3, 1) = (6 + 2\lambda - 5\mu, -\lambda - 3\mu, -1 + \lambda + \mu)$

2015.- Considereu a $\mathbb{R}3$ la recta que té per equació r:(x, y, z)=(–4+2λ,–2,1–λ) i els plans π_1 i π_2 d'equacions π_1:x+2y+2z=–1 i π_2:x–2y+2z=–3, respectivament.

a) Determineu la posició relativa de π_1 i π_2

b) Comproveu que tots els punts de la recta r estan situats a la mateixa distància dels plans π_1 i π_2.

Nota: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x0, y0, z0) al pla: $\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Sol: a) Vectors normals (1,2,2,) (1,-2-2) no són proporcionals → no són paral·lels. → es tallen en una recta

b)Un punt genèric $R=(-4+2\lambda,-2,1-\lambda)\ \to d(R,\pi_1)=d(R,\pi_2)$

$$\frac{|-4+2\lambda+2(-2)+2(1-\lambda)+1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{|-4+2\lambda-2(-2)+2(1-\lambda)+3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}\to\frac{|-5|}{3}=\frac{|5|}{3}\ R=(-4+2\lambda,-2,1-\lambda)\ \boxed{\text{tota la recta } r \text{ equidista dels dos plans}}$$

2015.- Siguin el punt P= (2,0,2) i el pla π d'equació x – y + z = 1

a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa pel punt P i és perpendicular al pla

b) Calculeu la distància del punt P al pla

c) $(A,B,C)=(1,-1,1)\ \Rightarrow\ (x,y,z)=(2,0,2)+\lambda(1,-1,1)=(2+\lambda,-\lambda,2+\lambda)$

d) $d(P,\pi)=\left|\dfrac{2-0+2-1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}\right|=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\ unitats.$

2015.- Siguin a $\mathbb{R}^3$ el punt P = (2,3,3) i la recta r: (x,y,z) = (1,2,3) + t(1,1,1).

a) Calculeu l'equació paramètrica del pla que passa pel punt P i conté la recta r.

b) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma Ax – By + Cz + D) del pla que passa pel punt P i és perpendicular a la recta r.

a) $R=(1,2,3)$ vector director $v_r=(1,1,1)\ \Rightarrow v_r=(1,1,1)$ i $\overline{PR}=R-P=(-1,-1,0)\ \Rightarrow \overline{(x,y,z)=(2,3,3)+\lambda(1,1,1)+\mu(-1,-1,0)=(2+\lambda-\mu,3+\lambda-\mu,3+\lambda)}$

b) pla ha de ser perpendicular amb r, $v_r=(1,1,1)$ serà el vector normal del pla. I quan fem passar el pla pel punt $P=(2,3,3)$ obtenim $\boxed{x+y+z=8}$

2015.- Siguin r i s les rectes, $r:\ \frac{x-2}{3}=y=\frac{z+1}{4}$ i $s:(x,y,z)=(1+2\alpha,3-\alpha,4+3\alpha)$.

a)Comproveu que els punts mitjans dels segments que tenen un extrem situat sobre la recta r i l'altre extrem situat sobre la recta s formen un pla.

b)Trobeu l'equació general del pla de l'apartat anterior.

a) Els punts generals $\begin{array}{l}R=(2+3\lambda,\lambda,-1+4\lambda)\\ S=(1+2\alpha,3-\alpha,4+3\alpha).\end{array}$

punts mitjans: $M=\dfrac{R+S}{2}=\left(\dfrac{3+3\lambda+2\alpha}{2},\dfrac{3+\lambda-\alpha}{2},\dfrac{3+4\lambda+3\alpha}{2}\right)=\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)+\lambda\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{2}\right)+\alpha\left(\dfrac{2}{2},\dfrac{-1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$

b) Sabem que és el pla que passa pel punt $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ i té per vectors directors els vectors directors (3,1,4) i (2,−1,3), per tant seran els punts (x,y,z) que satisfan l'equació

$$\begin{vmatrix} x-\frac{3}{2} & 3 & 2\\ y-\frac{3}{2} & 1 & -1\\ z-\frac{3}{2} & 4 & 3\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow\ 7\left(x-\frac{3}{2}\right)-1\left(y-\frac{3}{2}\right)-5\left(z-\frac{3}{2}\right)=0\ \Rightarrow\ \boxed{7x-y-5z=\frac{3}{2}}$$

Juny 2014.- 2 Considereu el punt A=(1, 2, 3):

a)Calculeu el punt simètric del punt A respecte de la recta d'equació:(x, y, z)=(3+λ,1,3–λ) R: (3,0,5)

b)Calculeu el punt simètric del punt A respecte del pla que té per equació π:x+y+z=3 R: (-1,0,1)

Juny 2014.- 5. Siguin r i s les rectes de $\mathbb{R}3$ d'equacions $r:\ \frac{x-2}{3}=y=\frac{z+1}{4}$ i s:(x, y, z)=(1+2α, 3–α, 4+3α), amb α∈ℝ.

a)Comproveu que els punts mitjans dels segments que tenen un extrem situat sobre la recta r i l'altre extrem situat sobre la recta s formen un pla.

b)Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma *Ax+By+Cz=D*) del pla de l'apartat anterior.

$$M=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)+\lambda\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{4}{2}\right)+\alpha\left(\frac{2}{2},\frac{-1}{2},\frac{3}{2}\right)\quad 7x-y-5z=\frac{3}{2}$$

Juny 2014.- 3b. Siguin els punts P=(1, 1, 0), Q=(1, 0, 1) i R=(0, 1, 1) i el pla π: *x + y + z = 4* .

a) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma Ax+By+Cz=D) del pla que passa pels punts P, Q i R.

b) Si S és un punt de π, comproveu que el **volum del tetraedre** de vèrtexs P, Q, R i S no depèn del punt S.

R: a) x=y=z=2 b) V = 1/3 u^3

Juny 2014.- 4b Donats els plans π1: x–4y+z=2m–1 i π2: 2x–(2m+2)y+2z=3m+1,

a) Determineu els valors de **m** perquè els plans π1 i π2 s'intersequin en una recta i calculeu un vector director de la recta resultant que no depengui de m.

b) Sigui el pla π:3x–2y+3z=8. Estudieu la **posició relativa** del pla π amb la recta r definida per la intersecció dels plans π1 i π2 quan m=1

R: a) Si $m \neq 3$; $v = (1,0,-1)$; r paral·lela i continguda en el pla.

PAU: El pla d'equació general $x + y + z = 10$ talla les rectes: r_1: $x = y = 1$; r_2: $y = z = 2$; r_3: $x = z = 3$ als punts A, B i C, respectivament. Es demana:

a) Trobar el **volum del tetraedre** que té com a vèrtexs A, B, C i el punt D: (1, 2, 3).

b) Determinar la **distància** des del vèrtex D fins a la cara oposada del tetraedre.

a) Calculem els punts A, B i C amb els sistemes:

A: $\begin{cases} x + y + z = 10 \\ x = y = 1 \end{cases}$ → A (1,1,8) B: $\begin{cases} x + y + z = 10 \\ y = z = 2 \end{cases}$ → B=(6,2,2) c: $\begin{cases} x + y + z = 10 \\ x = z = 3 \end{cases}$ → C(3,4,3)

Calculem els vectors $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AB} = (5,1,-6)$, $\overrightarrow{AC} = (2,3,-5)$, $\overrightarrow{AD} = (0,1,-5)$

Volum del paralepípede es el producte mixt: $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}$ = 52 → Volum del tetraedre: 1/6 · 52 = 26/3

b) La cara oposada és el pla: $x + y + z = 10$ → $d(D,\pi) = \frac{1+2+3-10}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

PAU: Considera els punts A (2, 0, 0), B (0, 2, 0), C (2, 2, 1) i D (1, 1, 2). Calcula:

a) El **volum** del tetraedre que determinen.

b) L'equació cartesiana o implícita del pla que conté el punt D i que és **paral·lel** al que conté els punts A, B i C.

a) El tetraedre està determinat pels vectors $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AB} = (-2,2,0)$, $\overrightarrow{AC} = (0,2,1)$, $\overrightarrow{AD} = (-1,1,2)$

Volum del paralepípede es el producte mixt: $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ = -8 → Volum del tetraedre: 1/6 ·|-8| = 4/3

b) El pla passa pel punt D i té com a vectors directors AB= (−2, 2, 0) i AC= (0, 2, 1).

$$\pi = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2x + 2y - 4z = 0 \rightarrow \pi = x + y - 2z = 0$$

PAU: Troba els punts de la recta: $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{2}$

que equidisten dels plans: $x + y - z + 1 = 0$ i $x - y + z + 2 = 0$

Un punt genèric de la recta és P(−1+ 2λ, −3λ, 2 + 2λ).

Busquem els punts de la recta que equidisten dels dos plans amb la fórmula: $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

$\frac{|-1+2\lambda-3\lambda-2-2\lambda+1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|-1+2\lambda+3\lambda+2+2\lambda+2|}{\sqrt{1+1+1}}$ → $|-3\lambda - 2| = |7\lambda + 3|$ → $\lambda = -\frac{1}{2}$; $\lambda = -\frac{1}{4}$

Els punts que equidisten dels dos plans són: P_1 (−2, 3/2 , 1) i P_2 (− 3/2 , 3/4 , 3/2)

PAU: Troba l'equació general del pla que equidista dels punts P (2, 1, 3) i Q (0, 3, −1) i que és paral·lel al pla π: $3x - y + z + = 0$

El pla π' que busquem és paral·lel a π → π': 3x − y + z + D = 0

d(P, π') = d(Q, π') → $\frac{|3\cdot 2-1+3+D|}{\sqrt{9+1+1}} = \frac{|3\cdot 0-3-1+D|}{\sqrt{9+1+1}}$ → D + 8 = D − 4 → D = −2 ; El pla és π': 3x − y + z − 2 = 0

PAU: Donats els punts: A (1, 0, 0), B(0, −1, 0) i C (0, 0, 3). Es demana: a) Trobar el lloc geomètric dels punts de l'espai que equidisten de A, B i C, i indicar quina figura formen. b) Trobar les coordenades del centre de la circumferència que passa per aquests punts.

d(A, P) = d(B, P) → $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y+1)^2 + z^2$ → y+3z=4 És l'equació d'un pla

El lloc geomètric dels punts que equidisten de A, B i C és la recta d'intersecció dels dos plans x + y = 0 i + 3z = 4

b) el centre ha de ser la intersecció de la recta amb el pla: $\begin{cases} x + y = 0 \\ y + 3z - 4 = 0 \\ 3x - 3y + z - 3 = 0 \end{cases}$ → $(\frac{5}{19}, -\frac{5}{19}, \frac{27}{19})$

PAU 105. Considera el pla π d'equació $x - 5y + z - 3 = 0$ i les rectes r i s amb les equacions:

r: $x - 3 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{3}$ s: $\frac{x+1}{2} = y = z + 2$ Determina:

a) Els punts d'intersecció del pla π amb cada una de les dues rectes.

b) L'àrea i el perímetre del triangle format pels dos punts anteriors i l'origen de coordenades.

Solució:

a) Fem els sistemes: $\left.\begin{array}{r} x-3 = \frac{y-2}{2} \\ x-3 = \frac{z-4}{3} \\ x-5y+z+3=0 \end{array}\right\} \rightarrow P(3,2,4)$ $\left.\begin{array}{r} \frac{x+1}{2} = y \\ y = z+2 \\ x-5y+z+3=0 \end{array}\right\} \rightarrow Q(-1,0,-2)$

b)

$$\overrightarrow{OP}=(-3,-2,-4) \qquad \overrightarrow{OQ}=(1,0,2) \qquad \overrightarrow{PQ}=(-4,-2,-6)$$

$$\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & -2 & -4\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=-4\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}=(-4,2,2)$$

$$|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}|=2\sqrt{6}$$

$$\text{Àrea del triangle}=\frac{|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}|}{2}=\frac{2\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6}$$

$$\text{Perímetre del triangle}=|\overrightarrow{OP}|+|\overrightarrow{PQ}|+|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{29}+2\sqrt{14}+\sqrt{5}=15{,}1$$

PAU 107. Donades les rectes r: $\begin{cases} z+2y=2\\ x=-2z\end{cases}$ i s: $\begin{cases} x=-y\\ y=x+1\end{cases}$, es demana:

a) Determinar les coordenades del punt P en què es tallen i les equacions del pla que les conté.
b) Calcular l'equació de la recta s que passa pel punt Q (2, 0, 1) i que talla perpendicularment r1.
c) Obtenir les coordenades del punt R, intersecció de r_1 i s, i l'àrea del triangle de vèrtexs P, Q i R.

a) Fem el sistema per calcular el punt de intersecció: $\left.\begin{array}{r} x+2y=2\\ x=-2z\\ x=-y\\ y=z+1\end{array}\right\}\rightarrow P(-2,2,1)$

El pla que conté aquestes dues rectes és un pla que passa pel punt P (−2, 2, 1) i que té com a vectors directors els vectors directors de les rectes:

$$r_1:\left.\begin{array}{l} x=-2\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right\}\rightarrow\vec{v_1}=(-2,1,1) \qquad r_2:\left.\begin{array}{l} x=-1-\mu\\ y=1+\mu\\ z=\mu\end{array}\right\}\rightarrow\vec{v_2}=(-1,1,1) \qquad \pi:\begin{vmatrix} x+2 & y-2 & z-1\\ -2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=y-z-1=0$$

b) Trobem el pla perpendicular a r_1 que passa per Q. Aquest pla té com a vector normal el vector director de r_1.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_1}=(-2,1,1)\rightarrow\pi: -2x+y+z+D=0\\ Q(2,0,1)\in\pi\rightarrow -2\cdot2+0+1+D=0\rightarrow D=3\end{array}\right\}\rightarrow\pi: -2x+y+z+3=0$$

Calculem el punt de tall de r_1 i π: $\quad -2(-2\lambda)+1+\lambda+\lambda+3=0\rightarrow\lambda=-\frac{2}{3}\rightarrow T\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$

La recta que busquem, s, passa pels punts Q i T: $\quad \overrightarrow{QT}=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{5}{3}\right)\rightarrow s:\left.\begin{array}{l} x=2-2t\\ y=t\\ z=1-5t\end{array}\right\}$

c) La intersecció entre r_1 i *s* és el punt T.

$$\overrightarrow{PT}=\left(\frac{10}{3},-\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right) \quad \overrightarrow{PQ}=(4,-2,0) \qquad \overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PT}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -2 & 0\\ \frac{10}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{5}{3}\end{vmatrix}=\frac{10}{3}\vec{i}+\frac{20}{3}\vec{j}=\left(\frac{10}{3},\frac{20}{3},0\right)$$

$$|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PT}|=\frac{10\sqrt{5}}{3} \qquad \text{Àrea del triangle}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PT}|=\frac{5\sqrt{5}}{3}$$

PAU 108. En l'espai es consideren: La recta ***r*** intersecció de dos plans d'equacions implícites:
x + y − z = 5   2 x + y − 2 z = 2   I la recta ***s*** que passa pels punts: P (3, 10, 5) Q (5, 12, 6)   Es demana:
a) Calcular les equacions paramètriques de la recta r i de la recta s.
b) Calcular el punt H, intersecció de r i s i l'angle α que determinen r i s.
c) Calcular els punts M i N de la recta r per als quals l'àrea de cada un dels triangles de vèrtexs PQM i PQN és de 3 unitats.

a) $\quad r:\left.\begin{array}{l} x=-3+\lambda\\ y=8\\ z=\lambda\end{array}\right\} \qquad \overrightarrow{PQ}=(2,2,1)\rightarrow s:\left.\begin{array}{l} x=3+2\mu\\ y=10+2\mu\\ z=5+\mu\end{array}\right\}$

b) Calculem la intersecció de les dues $\left.\begin{array}{r} -3+\lambda=3+2\mu\\ 8=10+2\mu\\ \lambda=5+\mu\end{array}\right\}\rightarrow\begin{cases}\lambda=4\\ \mu=-1\end{cases}\rightarrow H(1,8,4)$ rectes:

L'angle entre r i s és el que determinen els seus vectors directors. $\quad \cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{|(1,0,1)\cdot(2,2,1)|}{\sqrt{2}\cdot3}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow\alpha=45^\circ$

c) Un punt genèric de la recta r és M(−3 + λ, 8, λ). $\overrightarrow{PM}=(-6+\lambda,-2,-5+\lambda)$ $\overrightarrow{PQ}=(2,2,1)$

$$\overrightarrow{PM}\times\overrightarrow{PQ}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -6+\lambda & -2 & -5+\lambda\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=(-2\lambda+8)\vec{i}+(\lambda-4)\vec{j}+(2\lambda-8)\vec{k}==(-2\lambda+8,\ \lambda-4,\ 2\lambda-8)$$

$$|\overrightarrow{PM}\times\overrightarrow{PQ}|=3(\lambda-4)$$

Àrea del triangle $\dfrac{|\overrightarrow{PM}\times\overrightarrow{PQ}|}{2}=\dfrac{3|\lambda-4|}{2}=3\rightarrow\begin{cases}\lambda-4=2\\ \lambda-4=-2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\lambda=6\\ \lambda=2\end{cases}$ =

Els punts que busquem són M(3, 8, 6) i N(−1, 8, 2)

PAU 130. Troba l'equació general del pla que equidista dels punts P (2, 1, 3) i Q (0, 3, −1) i que és paral·lel al pla π: 3x - y + z + 1 = 0.

El pla π' que busquem és paral·lel a π → π': 3x − y + z + D = 0

$$d(P,\pi')=d(Q,\pi')\rightarrow\frac{|3\cdot2-1+3+D|}{\sqrt{9+1+1}}=\frac{|3\cdot0-3-1+D|}{\sqrt{9+1+1}}$$ → D + 8 = D − 4 → D = −2

El pla és π': 3x − y + z − 2 = 0

PAU 129. Troba els punts de la recta: $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-2}{2}$ que equidisten dels plans: x + y − z + 1 = 0 i x − y + z + 2 = 0.

Un punt genèric de la recta és P(−1+ 2λ, −3λ, 2 + 2λ).

Busquem els punts de la recta que equidisten dels dos plans: $\dfrac{|-1+2\lambda-3\lambda-2-2\lambda+1|}{\sqrt{1+1+1}}=\dfrac{|-1+2\lambda+3\lambda+2+2\lambda+2|}{\sqrt{1+1+1}}$

$$\rightarrow\begin{cases}-3\lambda-2=7\lambda+3\\ -3\lambda-2=-7\lambda-3\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\lambda=-\frac{1}{2}\\ \lambda=-\frac{1}{4}\end{cases}\rightarrow P_1\left(-2,\frac{3}{2},1\right)\text{ i }P_2\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{4},\frac{3}{2}\right)$$

PAU 121. Tenim els punts A(2, 3, 0) i B (−2, 1, 4). Determina:
a) L'equació del pla π, mediatriu del segment AB.
b) El volum del tetraedre format per π i els tres plans coordenats.
c) L'equació de la recta perpendicular al pla π que passa per l'origen.

a) El pla π passa pel punt mitjà M, del segment AB: M(0, 2, 2) i té com a vector normal el vector director de la recta que passa per A i B: AB = (−4, −2, 4) → π: −4x − 2y + 4z + D = 0 Substituint: −4 · 0 − 2 · 2 + 4 · 2 + D = 0 → D = −4
El pla és π: 2x y + − 2 2 z + = 0
b) Calculem els punts de tall del pla π amb els eixos de coordenades:
Tall amb l'eix X: → P(−1, 0, 0) Tall amb l'eix Y: → Q(0, −2, 0) Tall amb l'eix Z→ R(0, 0, 1)

Determinem el volum del tetraedre OPQR: $\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=2$ Volum $=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

c) La recta que busquem passa per l'origen i té com a vector director el vector normal del pla π: $s:\left.\begin{array}{l}x=2t\\ y=t\\ z=-2t\end{array}\right\}$

PAU 6.

a) Calcula els valors de *a* per als quals les rectes són **perpendiculars** $r:\begin{cases}3x+ay-6az+1=0\\ -x+y+3z-3=0\end{cases}$ $s:\begin{cases}x=-1-\lambda\\ y=3+\lambda\\ z=1+a\lambda\end{cases}$

b) Per a *a = 1*, calcula la recta que passa per (1, 1, 1) i es **recolza** a *r* i *s*.

a) Determinem els vectors directors de cada recta. $\vec{u_r}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & a & -6a\\ -1 & 1 & 3\end{vmatrix}=(9a)\vec{i}+(-9+6a)\vec{j}+(3+a)\vec{k}=(9a,-9+6a,3+a)$ $\vec{u_s}=(-1,1,a)$

Les rectes són perpendiculars si ho són els seus vectors directors: ur · us = 0
ur · us = (9a, −9 + 6a, 3 + a) · (−1, 1, a) = a2 − 9 = 0 →a= ±3

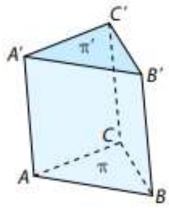
b) Si a = 1: $r:\left.\begin{array}{r}3x+y-6z+1=0\\ -x+y+3z-3=0\end{array}\right\}\rightarrow r:\left.\begin{array}{l}x=-1+9\lambda\\ y=2-3\lambda\\ z=4\lambda\end{array}\right\}$ $s:\left.\begin{array}{l}x=-1-\lambda\\ y=3+\lambda\\ z=1+\lambda\end{array}\right\}$

Trobem el pla π1, que conté la recta r i el punt P(1, 1, 1). R(−1, 2, 0) ∈ r → PR = (−2, 1, −1)

La recta que ens demanen està determinada per dos plans π1 i π2.
Trobem π2, que conté la recta s i el punt P(1, 1, 1). S(−1, 3, 1) ∈ s → PS = (−2, 2, 0)

$$\pi_1: \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 9 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -x+y+3z-3=0 \qquad \pi_2: \begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z-1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2x-2y+4=0 \qquad m: \begin{rcases} x-y-3z+3=0 \\ x+y-2=0 \end{rcases}$$

PAU 123.



Tenim el prisma triangular (triangles iguals i paral·lels) de la figura, amb
A (1, −1, 0), B (1, 0, −1), C (0, 1, −1) i A'(1, −1, α). Calcula:
a) L'equació del pla π que passa pels punts A, B i C.
b) El valor de α perquè el pla π', que conté els punts A', B' i C', disti una unitat del pla π.
c) Per a α = 1, l'equació del pla π' i el **volum** del prisma

a) El pla π passa pel punt A i té per vectors directors AB i AC. AB= (0, 1, −1) AC= (−1, 2, −1):

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = x+y+z=0$$

b) π' és paral·lel al pla π → π': x + y + z + D = 0 → A'(1, −1, α) ∈ π' → 1· 1+1· (−1) +1· α + D = 0 → D = −α
El pla és π ': x+ y + z − α = 0
Com que π i π' són paral·lels, agafem A(1, −1, 0) ∈ π: $d(A, \pi') = \dfrac{|1-1+0-\alpha|}{\sqrt{1+1+1}} = 1 \rightarrow \begin{cases} \alpha = \sqrt{3} \\ \alpha = -\sqrt{3} \end{cases}$

Hi ha dos punts que compleixen la condició: A'(1, −1, √3) i A'(1, −1, -√3)

c) α = 1→ π': x + y + z −1= 0 → $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ Volum del prisma $= \dfrac{1}{2}$

PAU 2018.1

Considereu els punts P=(3,–2,1), Q=(5,0,3), R=(1,2,3) i la recta r: $\begin{cases} x+y+1=0 \\ 2y+3z+5=0 \end{cases}$

a) Determineu l'equació general (és a dir, que té la forma Ax+By+Cz=D) del pla que passa per P i Q i és **paral·lel** a la recta r
b) Donats el pla x+2y+m·z=7 i el pla que passa per P, Q i R, trobeu ***m*** perquè siguin **paral·lels** i no coincidents.

Solució:

a) Vector direcció de r és el producte vectorial: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{vmatrix}$ =(3, –3, 2)
Vector QP = (2,2,2) o equivalentment(1,1,1).
Vector associat del pla, es el producte vectorial de: (3, -3, 2) x (1,1,1) = (5, 1, -6)
El pla 5x+1y-6z+D=0 ha de passar per P(3,-2,1): 5·3-1·2-6·1=-D → D=-7 → 5x + y – 6z = 7

b) Vector QP= (2,2,2) o equivalentment(1,1,1) Vector = R-P= (-2,4,2) o equivalentment (-1,2,1).
Vector normal al pla: = (1, 1, 1) × (-1, 2, 1) = (-1, -2, 3).
Els vectors normals seran proporcionals. Per tant, m=-3.
Comprovem que els plans no són coincidents perquè el punt P no hi pertany, x+2y-3z ≠7

Enunciados solo (para practicar)

J2011. Donada la recta: R: $\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ X + Z + 1 = 0 \end{cases}$

a) Trobeu-ne un vector director.

b) Calculeu l'equació contínua de la recta paral·lela a rque passa pel punt P=(1, 0, −1)

2017: Considereu els plans π1: 5x–y–7z=1 i π2: 2x+3y+z=5.

a) Determineu l'equació general (és a dir, la que té la forma Ax+By+Cz=D) del pla que passa per l'origen de coordenades i és **perpendicular** als plans π1 i π2. b) Calculeu **l'angle** que formen els plans π1 i π2

2017: Siguin les rectes de ℝ3 $r: \begin{cases} 2x - y = 1 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$ i $s: x+1 = \frac{y-2}{2} = z-1$

a)Comproveu que són **paral·leles**.

b)Calculeu l'equació vectorial del pla que les conté.

2017: Considereu el pla π = x + y + z = 1 i la recta que passa pels punts P(0,0,6) y Q (1,2,3)

a)Estudieu la **posició relativa** de la recta r i el pla]

b)Calculeu la **distància** entre la recta r i el pla.

2016: A $\mathbb{R}^3$, siguin la recta r que té per equació (x, y, z)=(1+λ,λ,1–λ) i el pla π d'equació 2x–y+z = –2.

a)Determineu la posició relativa de la recta r i el pla π.[1 punt]

b)Calculeu la distància entre la recta r i el pla π.

2016J: Siguin a R^3 el pla d'equació x – y + 2z= 2 i els punts (3,-1,2)i (1,1,-2).

a) Comproveu que els punts i són simètrics respecte del pla .

b)Si és la recta dels punts de la forma en què és un paràmetre real i (), verifiqueu que els punts mitjans dels segments pertanyen al pla .

2016: Siguin les rectes s $(x, y, z) = (2, 3, -3) + \lambda(1, -1, 0)$ i $s: \frac{x-3}{2} = y - 5 = z + 2$.

a) Estudieu si les rectes i són paral·leles o perpendiculars.

b)Determineu la posició relativa entre les rectes i i calculeu l'equació paramètrica de la recta que talla perpendicularment la recta i la recta .

2015.- Sigui r la recta de l'espai que té per equació $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = z$ i sigui P el punt de coordenades (6, 0, -1).

a) Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma) del pla que passa pel punt P i talla perpendicularment la recta r.

b) Trobeu l'equació paramètrica del pla que passa pel punt P i conté la recta r.

2015.- Considereu a ℝ3 la recta que té per equació r:(x, y, z)=(–4+2λ,–2,1–λ) i els plans π_1 i π_2 d'equacions π_1:x+2y+2z=–1 i π_2:x–2y+2z=–3, respectivament.

a) Determineu la posició relativa de π_1 i π_2

b) Comproveu que tots els punts de la recta r estan situats a la mateixa distància dels plans π_1 i π_2.

2015.- Siguin el punt P= (2,0,2) i el pla π d'equació x – y + z = 1

a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa pel punt P i és perpendicular al pla

b) Calculeu la distància del punt P al pla

2015.- Siguin a $\mathbb{R}^3$ el punt P = (2,3,3) i la recta r: (x,y,z) = (1,2,3) + t(1,1,1).

a) Calculeu l'equació paramètrica del pla que passa pel punt P i conté la recta r.

b) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma Ax – By + Cz + D) del pla que passa pel punt P i és perpendicular a la recta r.

2015.- Siguin r i s les rectes, $r: \frac{x-2}{3} = y = \frac{z+1}{4}$ i $s: (x, y, z) = (1 + 2\alpha, 3 - \alpha, 4 + 3\alpha)$.

a)Comproveu que els punts mitjans dels segments que tenen un extrem situat sobre la recta r i l'altre extrem situat sobre la recta s formen un pla.

b)Trobeu l'equació general del pla de l'apartat anterior.

Juny 2014.- 2 Considereu el punt A=(1, 2, 3):

a)Calculeu el punt simètric del punt A respecte de la recta d'equació:(x, y, z)=(3+λ,1,3–λ) R: (3,0,5)

b)Calculeu el punt simètric del punt A respecte del pla que té per equació π:x+y+z=3 R: (-1,0,1)

Juny 2014.- 5. Siguin r i s les rectes de ℝ3 d'equacions $r: \frac{x-2}{3} = y = \frac{z+1}{4}$ i s:(x, y, z)=(1+2α, 3–α, 4+3α), amb α∈ℝ.

a)Comproveu que els punts mitjans dels segments que tenen un extrem situat sobre la recta r i l'altre extrem situat sobre la recta s formen un pla.

b)Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma *Ax+By+Cz=D*) del pla de l'apartat anterior.

Juny 2014.- 3b. Siguin els punts P=(1, 1, 0), Q=(1, 0, 1) i R=(0, 1, 1) i el pla π: x+y+z=4.

a) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma Ax+By+Cz=D) del pla que passa pels punts P, Q i R.

b) Si S és un punt de π, comproveu que el **volum del tetraedre** de vèrtexs P, Q, R i S no depèn del punt S.

Juny 2014.- 4b Donats els plans π1: x–4y+z=2m–1 i π2: 2x–(2m+2)y+2z=3m+1,

a) Determineu els valors de **m** perquè els plans π1 i π2 s'intersequin en una recta i calculeu un vector director de la recta resultant que no depengui de m.

b) Sigui el pla π:3x–2y+3z=8. Estudieu la **posició relativa** del pla π amb la recta r defi-nida per la intersecció dels plans π1 i π2 quan m=1

PAU: El pla d'equació general $x + y + z = 10$ talla les rectes: *r 1*: $x = y = 1$; *r2*: $y = z = 2$; *r3*: $x = z = 3$ als punts A, B i C, respectivament. Es demana:

a) Trobar el **volum del tetraedre** que té com a vèrtexs A, B, C i el punt D (1, 2, 3).

b) Determinar la **distància** des del vèrtex D fins a la cara oposada del tetraedre.

PAU: Considera els punts A (2, 0, 0), B (0, 2, 0), C (2, 2, 1) i D (1, 1, 2), i calcula:

a) El volum del tetraedre que determinen.

b) L'equació cartesiana o implícita del pla que conté el punt D i que és paral·lel al que conté els punts A, B i C.

PAU: Troba els punts de la recta: $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{2}$

que equidisten dels plans: $x + y - z + 1 = 0$ i $x - y + z + 2 = 0$

PAU: Troba l'equació general del pla que equidista dels punts P (2, 1, 3) i Q (0, 3, −1) i que és paral·lel al pla π: $3x - y + z + = 0$

PAU: Donats els punts: A (1, 0, 0), B(0, −1, 0) i C (0, 0, 3). Es demana: a) Trobar el lloc geomètric dels punts de l'espai que equidisten de A, B i C, i indicar quina figura formen. b) Trobar les coordenades del centre de la circumferència que passa per aquests punts.

PAU 105. Considera el pla π d'equació $\mathrm{x} - 5\mathrm{y} + \mathrm{z} - 3 = 0$ i les rectes r i s amb les equacions:

$r\colon x - 3 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{3}$ $s\colon \frac{x+1}{2} = y = z + 2$ Determina:

a) Els punts d'intersecció del pla π amb cada una de les dues rectes.

b) L'àrea i el perímetre del triangle format pels dos punts anteriors i l'origen de coordenades.

PAU 107. Donades les rectes r: $\begin{cases} z + 2y = 2 \\ x = -2z \end{cases}$ i s: $\begin{cases} x = -y \\ y = x + 1 \end{cases}$, es demana: a) Determinar les coordenades del punt P en què es tallen i les equacions del pla que les conté. b) Calcular l'equació de la recta s que passa pel punt Q (2, 0, 1) i que talla perpendicularment r1. c) Obtenir les coordenades del punt R, intersecció de r_1 i s, i l'àrea del triangle de vèrtexs P, Q i R.

PAU 108. En l'espai es consideren: La recta ***r*** intersecció de dos plans d'equacions implícites:
x + y − z = 5   2 x + y − 2 z = 2   I la recta ***s*** que passa pels punts: P (3, 10, 5) Q (5, 12, 6)   Es demana:

a) Calcular les equacions paramètriques de la recta r i de la recta s.

b) Calcular el punt H, intersecció de r i s i l'angle α que determinen r i s.

c) Calcular els punts M i N de la recta r per als quals l'àrea de cada un dels triangles de vèrtexs PQM i PQN és de 3 unitats.

PAU 130. Troba l'equació general del pla que equidista dels punts P (2, 1, 3) i Q (0, 3, −1) i que és paral·lel al pla π: 3x - y + z + 1 = 0.

PAU 129. Troba els punts de la recta: $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{2}$ que equidisten dels plans: x + y − z + 1 = 0 i x − y + z + 2 = 0.

PAU 121. Tenim els punts A(2, 3, 0) i B (−2, 1, 4). Determina:

a) L'equació del pla π, mediatriu del segment AB.

b) El volum del tetraedre format per π i els tres plans coordenats.

c) L'equació de la recta perpendicular al pla π que passa per l'origen.

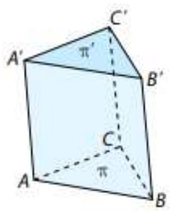
PAU 6.

a) Calcula els valors de *a* per als quals les rectes són **perpendiculars** $r\colon \begin{cases} 3x + ay - 6az + 1 = 0 \\ -x + y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$ $s\colon \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + a\lambda \end{cases}$

b) Per a *a = 1*, calcula la recta que passa per (1, 1, 1) i es **recolza** a *r* i *s*.

PAU 123.

Tenim el prisma triangular (triangles iguals i paral·lels) de la figura, amb A (1, −1, 0), B (1, 0, −1), C (0, 1, −1) i A'(1, −1, α). Calcula:



a) L'equació del pla π que passa pels punts A, B i C.

b) El valor de α perquè el pla π', que conté els punts A', B' i C', disti una unitat del pla π.

c) Per a α = 1, l'equació del pla π' i el **volum** del prisma

PAU 2018.1

Considereu els punts P=(3,–2,1), Q=(5,0,3), R=(1,2,3) i la recta r: $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$

a) Determineu l'equació general (forma Ax+By+Cz=D) del pla que passa per P i Q i és **paral·lel** a la recta r

b) Donats el pla x+2y+m·z=7 i el pla que passa per P, Q i R, trobeu ***m*** perquè siguin **paral·lels** i no coincidents.

(2011-setembre-2) 5. Considereu la recta $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = z - a$ i el pla *π : 2x+ y−5z=5*.

a) Estudieu la posició relativa de la recta *r* i el pla *π* en funció del paràmetre *a*.

b) Quan *a* = 3, calculeu la distància de la recta *r* al pla *π*.