Tabla de integrales inmediatas

Inmediatas	Cuasi inmediatas (Con función)
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\int f^n(x) \cdot f'(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + k$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + k$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\|f(x)\| + k$
$\int e^x dx = e^x + k$	$\int e^{f(x)} f'(x)dx = e^{f(x)} + k$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + k$	$\int a^{f(x)} f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + k$
$\int \mathrm{sen}x dx = -\cos x + k$	$\int \mathrm{sen}(f(x))f'(x)dx = -\cos(f(x)) + k$
$\int \cos x dx = \mathrm{sen}x + k$	$\int \cos(f(x))f'(x)dx = \mathrm{sen}(f(x)) + k$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1+\mathrm{tg}^2 x)dx = \mathrm{tg}x + k$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))} dx = \int (1+\mathrm{tg}^2(f(x))f'(x)dx = \mathrm{tg}(f(x)) + k$
$\int \frac{1}{\mathrm{sen}^2 x} dx = \int (1+\mathrm{cotg}^2 x)dx = -\mathrm{ctg}x + k$	$\int \frac{f'(x)}{\mathrm{sen}^2(f(x))} dx = \int (1+\mathrm{ctg}^2(f(x))f'(x)dx = -\mathrm{ctg}(f(x)) + k$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \mathrm{arcsen}x + k$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} dx = \mathrm{arcsen}(f(x)) + k$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{arctg}x + k$	$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \mathrm{arctg}(f(x)) + k$

Propiedades y métodos de calcular

- En la suma/resta: La integral de la suma es la suma de las integrales: $\int (u+v)\,dx = \int u\ dx + \int v\ dx$
  Ejemplo: $\int (senx + x^2)\,dx = \int senx\ dx + \int x^2\ dx = -cosx \cdot \frac{x^3}{3} + k$
- En la constante: La integral de una constante por una función es la constante por la integral de la función.
  Ejemplo: $\int 3 \cdot senx\ dx = 3 \cdot \int senx\ dx = 3(-cosx) + K$
- En la multiplicación: No hay regla fija
  - Si un factor es la derivada del otro, por cambio de variable: $\int sinx \cdot cosxdx = \int t\ dt = \frac{t^2}{2} = \frac{(\sin x)^2}{2} + k$
  - Si un factor es la derivada del interior del otro (regla de la cadena inversa): $\int e^{x^2} \cdot 2x\,dx = \int u\,du = e^{x^2} + k$
  - Si ambos factores no tiene nada que ver: Por el método por partes:

  Ejemplos: $\int 2x^3 dx = \int x^2 \cdot 2x$ dx = $\int t \cdot dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{x^4}{2} + k$
- En la división: No hay regla fija
  - Intentar que el numeador sea la derivada del denominador, para aplicar Ln.
  - Si en el denominador hay una x^2, intentar que se parezca a la arctang.
  - Si no, hacer por el método cambio variable o pr descomposición:
  - Si no, aplicar método racionales.

  Ejemplo: $\int tan\ x$ dx $= \int \frac{sinx}{\cos x}$ dx = $-\int \frac{-sinx}{cosx}$ = $\ln\ |cosx| + k$

Tabla de integrales inmediatas con ejemplos

TIPOS	EJEMPLOS
Tipo potencial $\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\int \sqrt{x^3}\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}.dx = \frac{x^{3/2+1}}{3/2+1} = \frac{x^{5/2}}{5/2} = \frac{2\sqrt{x^5}}{5}$
Tipo logarítmico $\int \frac{f'}{f}dx = L\|f\|$	$\int \frac{e^x}{1+e^x}dx = L(1+e^x)$
Tipo exponencial $\int f'.e^f.dx = e^f$ $\int f'.a^f.dx = \frac{a^f}{La}$	$\int e^{-2x}dx = \frac{1}{-2}\int(-2)e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}$ $\int 5^x.9^x.dx = \int 45^x dx = \frac{45^x}{L45}$
Tipo coseno $\int senx dx = -\cos x$ $\int f'.senf.dx = -\cos f$	$\int sen\frac{x}{3}dx = 3\int\frac{1}{3}.sen\frac{x}{3}dx = -3\cos\frac{x}{3}$
Tipo seno $\int \cos x = senx$ $\int f'.\cos f.dx = senf$	$\int \cos(2x+5)dx = \frac{1}{2}\int 2.\cos(2x+5)dx = sen(2x+5)$
Tipo tangente $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx$ $\int \frac{f'}{\cos^2 f}dx = tgf$	$\int tg^2 x\,dx = \int(1+tg^2 x-1)dx = tg\,x - x$ $\int \frac{x}{\cos^2(5x^2-3)} = \frac{1}{10}\int\frac{10x}{\cos^2(5x^2-3)} = \frac{1}{10}tg(5x^2-3)$
Tipo cotangente $\int \frac{1}{sen^2 x}dx = -\cot g\,x$ $\int \frac{f'}{sen^2 f}dx = -\cot g\,f$	$\int \cot g^2\ x dx = \int(1+\cot g^2\ x-1)dx = -\cot g\,x - x$ $\int \frac{x}{sen^2\,3x^2}dx = \frac{1}{6}\int\frac{6x}{sen^2\,3x^2}dx = -\frac{1}{6}\cot g\,3x^2$
Tipo arc senx (= −arc cosx) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arc\,senx$ $\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}dx = arc\,senf$	$\int^2 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}dx = \frac{1}{2}arcsen$ $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx = \int\frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}}dx = arcsen\,e^x$
Tipo arco tang.(= -arc cotang.) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = arc$ tgx $\int \frac{f'}{1+f^2}dx = arc\,tgf$	$\int \frac{1}{3+3x^2}dx = \frac{1}{3}\int\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{3}arctg\,x$ $\int \frac{1}{1+9x^2}dx = \int\frac{1}{1+(3x)^2}dx = \frac{1}{3}\int\frac{3}{1+(3x)^2}dx = \frac{1}{3}arc\ \ tg(3x)$

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

0. INTEGRALES CUASI INMEDIATAS:

Generalmente se ajusta una constante o para que un factor de la función sea la derivada del otro (una dentro de otra; regla cadena)

Ejemplo1 $\int f(x)\cdot f'(x)dx$ *equivale a tener* $\int u\, du$

- $\int x^2(2-2x^3) = \rightarrow$ *buscamos la forma* $\int f(x)\cdot f'(x)dx$ *ó si:* $t = 2-2x^3$ *queda:* $\int t\, dt$
  $= -\frac{1}{6}\int -6x^2(2-2x^3)dx = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}(2-2x^3)^2 = -\frac{1}{12}(2-2x^3)^2$

Si en el producto, una función es derivada de la otra: $\int g(f)\cdot f'dx = g(f)+k$

- $\int sin^3x\cdot cosx\, dx = \int(sin\, x)^3\cdot cosx\, dx = \frac{(\sin x)^4}{4}+k$ → equivale al cambio: $\int t^3\cdot dt$

Ejemplo2: En la integral $\int\frac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$, la derivada $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ → multiplicando y dividiendo por 2:

$$\int\frac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = 2\int\frac{sen\sqrt{x}}{2\cdot\sqrt{x}}\, dx = 2\int sen\, t\, dt = -2\cos\sqrt{x}+K$$

Ejemplos de integrales que se transforman en inmediatas *(casi-inmediatas)*

1. $\int x^2(2-2x^3) \rightarrow \int f(x)\cdot f'(x)dx \rightarrow -\frac{1}{6}\int -6x^2(2-2x^3) = -\frac{1}{12}(2-2x^3)^2$
2. $\int\frac{1}{x^5}dx \rightarrow \quad = \int x^{-5}dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} = \frac{x^{-4}}{-4} = -\frac{1}{4x^4}+k$
3. $\int\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \rightarrow \quad = \int x^{-\frac{2}{3}} = \frac{x^{1/3}}{1/3} = 3\sqrt[3]{x}+k$
4. $\int\frac{sen\, x-cos\, x}{sen\, x+cos\, x}dx \rightarrow \quad = -\int\frac{cos\, x-sen\, x}{sen\, x+cos\, x}dx = -Ln|sen\, x+cos\, x|+k$
5. $\int\frac{3}{4x^2-4x+1}dx = \int\frac{3}{(2x-1)^2} = 3\int(2x-1)^{-2}dx = -\frac{3}{2}(2x-1)^{-1} = -\frac{3}{2}\frac{1}{(2x-1)}+k$
6. $\int\frac{1}{tg\, x}dx \rightarrow \quad = \int\frac{cos\, x}{sen\, x}dx = Ln|sen\, x|+C$
7. $\int\frac{x}{x^2+1}dx \rightarrow \quad = \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}Ln(x^2+1)+k$
8. $\int\frac{dx}{1+4x^2} \rightarrow \quad = \frac{1}{2}\int\frac{2\, dx}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t} = \frac{1}{2}\, arctg\, 2x+k$
9. $\int\frac{e^{arcsen\, x}}{\sqrt{1-x^2}}dx \rightarrow \quad = \int e^{arcsen\, x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = \int e^t\, dt = e^{arcsen\, x}+k$
10. $\int\frac{2^x}{1+4^x}dx \rightarrow \quad = \frac{1}{Ln2}\int\frac{2^x\, .Ln2}{1+(2^x)^2}dx = \frac{1}{Ln2}arctg\, 2^x + k$
11. $\int sec^2\frac{x}{3}dx \rightarrow \quad = 3\int\frac{1}{3}.sec^2\frac{x}{3}dx = 3tg\frac{x}{3}$
12. $\int sec^2(2x+1)dx \rightarrow = \frac{1}{2}\int 2.sec^2(2x+1)dx = \frac{1}{2}tg(2x+1)+k$
13. $\int\frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}} \rightarrow = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{9x^2}{16}}} = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{3x}{4})^2}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\, arc\, sin\,\frac{3}{4}x+k = \frac{1}{2}\, arc\, sin\,\frac{3x}{4}+k$

1.- METODO DE INTEGRACION POR PARTES.

Se utiliza este método cuando en la expresión a integrar se aprecia la existencia de dos funciones sin que ninguna de ellas sea derivada de la otra. La fórmula a emplear es la siguiente: $\int \boldsymbol{u\, dv = u\, v - \int v\, du}$

Recordar frase pnemotécnica: ***Ud****ia****V****i = ****U****na****V****aca –* ∫ ***V****estida* ***de****U**niforme*

Una parte la tenemos que saber integrar y la otra derivar. Si hay parte polinómica, intentar que baje de grado.

Truco: orden de integración: ALPES: ***A****rcos* ***L****ogaritmos* ***P****otencias* ***E****xponenciales* ***S****enoycoseno*

Ejemplos:

1.- $\int \boldsymbol{3x^2 \cdot \ln x\ dx}$ → cambiamos el orden (ALPES): $\int lnx \cdot 3x^2 dx$

u= lnx se deriva y **dv** = $3x^2$ se integra . Luego aplicamos la fórmula: $\int \boldsymbol{u\ dv = u\, v - \int v\ du}$ y sustituimos:

u = lnx ⇒ du = $\frac{1}{x}dx$

dv = $3x^2$ ⇒ v = x^3, $\int 3x^2 \cdot \ln x\ dx = x^3 \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} x^3\, dx = x^3 \cdot \ln x - \frac{x^3}{3} + k$

2.- $\int \boldsymbol{x^2 \cdot senx\, dx}$

$u = x^2$ $\quad u = 2xdx$

$dv = sen\, x\, dx \quad v = \int sen\, x\, dx = -\cos x$ → $\mathrm{I} = -x^2\ \cos x + \int 2x \cos x\, dx.$

(*) A veces hay que repetir la integración por partes como en este caso:

$\left.\begin{matrix} u = 2x \\ dv = \cos x\, dx \end{matrix}\right\} \begin{matrix} du = 2dx \\ v = \int \cos x\, dx = sen\, x \end{matrix}$ → $\int 2x \cos x\, dx = 2x\, sen\, x - \int 2\, sen\, x\, dx = 2x\, sen\, x + 2 \cos x$

Y volviendo a la expresión (*) obtenemos el resultado final: $I = -x^2 \cos x + 2x\, senx + 2\, cosx + K$

3- $\int \boldsymbol{e^x \cdot (7 + 2x) dx}$ → cambiamos el orden (ALPES): $\int (7 + 2x) \cdot e^x dx$

$\begin{matrix} u = 7 + 2x \\ dv = e^x \end{matrix} \quad \begin{matrix} du = 2x \\ v = e^x \end{matrix}$ → $\mathrm{I} = (7 + 2x) \cdot e^x - \int 2 \cdot e^x\, dx = (7 + 2x) \cdot e^x - 2 \cdot e^x = e^x\, (5 + 2x) + k$

4.- $\int \boldsymbol{\frac{ln\, x}{x^2}\ dx}$

Equivale a: $\int lnx \cdot x^{-2} dx$

u = lnx → du = 1/x

dv= x^{-2} → v = $\int x^{-2}$ = - x^{-1} ; I = $u \cdot v$ - $\int v \cdot du$ = lnx · -1/x - ∫ - x^{-2}· 1/x dx = $\frac{-lnx}{x} - \frac{1}{x}$ + C

5.- $\int \boldsymbol{arc\ tg\ x\ \ dx}$

$\begin{matrix} u = arc\ tgx \\ dv = dx \end{matrix} \quad \begin{matrix} du = \frac{1}{1+x^2} \\ v = x \end{matrix}$ Aplicando la fórmula que hemos indicado anteriormente, $I = x.arctg\, x - \int x. \frac{1}{1+x^2} dx$

La integral resultante es de tipo logarítmico: $\mathrm{I} = x.arctg\, x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = x.arctg\, x - \frac{1}{2} L(1 + x^2\,)$+C

2.-METODO DE SUSTITUCIÓN O CAMBIO DE VARIABLE.

*Consiste en sustituir la variable x por otra variable **t** mediante una nueva función g tal que x=g(t) a fin de transformar el integrando en otro más sencillo.*

Ejemplos:

1.- $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$

Cambiamos x por t^2 (para eliminar la raíz) $x = t^2$, con lo que $dx = 2tdt$ y la integral queda:

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx = \int \frac{2t}{t^2+t}dt = \int \frac{2}{t+1}dt = 2\ln|t+1| + k = \ln(t+1)^2 + k.$$

Deshaciendo el cambio, $t = \sqrt{x}$, se tiene: $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx = \ln(\sqrt{x}+1)^2 + k.$

2.- $\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$

Hacemos el cambio $\sqrt{x-1} = t$ y elevando al cuadrado, $x-1 = t^2$

Diferenciando la igualdad anterior, $dx = 2t.dt$

Por otra parte, de $x-1 = t^2$ resulta $x = 1+t^2$

Sustituyendo resulta: $\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx = \int \frac{1}{(1+t^2).t}.2tdt = 2\int \frac{1}{1+t^2}dt = 2arctgt = 2arctg\sqrt{x-1} + C$

3.- $\int x^2\sqrt{1+x^3}\,dx$

Hacemos el cambio $\sqrt{1+x^3} = t \Rightarrow 1+x^3 = t^2 \Rightarrow 3x^2dx = 2tdt$

Despejamos en forma adecuada: $x^2dx = \frac{2t\,dt}{3}$ y ahora sustituimos:

$$\int x^2\sqrt{1+x^3} = \int \sqrt{1+x^3}.x^2\,dx = \int t.\frac{2tdt}{3} = \frac{2}{3}\int t^2\,dt = \frac{2}{3}\frac{t^3}{3} = \frac{2\sqrt{(1+x^3)^3}}{9}$$

4.- $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx$

Hacemos el cambio $x^2+x+1 = t \Rightarrow (2x+1)dx = dt$

Sustituyendo en la integral resulta:

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}dt = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2+x+1} + C$$

5.- $\int sen^2x\cos^3x\,dx$

El cambio que podemos realizar es el siguiente: $senx = t$ (Por ser impar en cosx)
De dicho cambio resulta: $cosxdx = dt$ y sustituyendo en la integral propuesta obtenemos:

$$\int sen^2x\cos^3x\,dx = \int sen^2\,x\,.cos^2\,x\,.cos\,x\,dx = \int t^2(1-t^2)dt =$$

$$= \int (t^2 - t^4)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} = \frac{sen^3\,x}{3} - \frac{sen^5\,x}{5} + C$$

6.- $\int \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,\boldsymbol{dx}$

$\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2$ → $\mathrm{I} = \int \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}} 2tdt = 2\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = 2\,arcsen\,t = 2\,arcsen\sqrt{x} + k$

$dx = 2tdt$

<u>*Otros cambios:*</u>

$\int \frac{x^2}{x^3-2}dx = \frac{1}{3}Ln\left|x^3-2\right| + C$

$x^3 = t \Rightarrow 3x^2dx = dt$

$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C$

$\operatorname{arctg} x = t \Rightarrow \frac{1}{1+x^2}dx = dt$

$\int \cos\left(x^2\right)2x\ dx = \operatorname{sen} x^2 + C$

$x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt$

$\int 2xe^{x^2}dx = e^{x^2} + C$

$x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt$

$\int \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{ln}\,\boldsymbol{x}}\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{Ln}\,(\boldsymbol{Ln}\,\boldsymbol{x})$

$Cambiamos: Ln\,x = t \rightarrow dt = \frac{1}{x}\ dx$

Para poder usar: $\int \frac{dt}{t} = \ln t$ → Sustituimos: $\int \frac{1}{x\cdot\ln x}dx = \int \frac{1/x}{\ln x}dx = Ln\,(\ln x) + k$

3.- METODO DE DESCOMPOSICION EN FRACCIONES SIMPLES

Consiste en separar la función fracional en sumas de funciones fracionales.

- Si grado del numerador > grado del denominador: se hace la división y después se integra el cociente más el resto partido por el divisor es decir**, si:** $\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r}{q(x)}$ por tanto: $\int \frac{p(x)}{q(x)} = \int c(x)dx + \int \frac{r}{q(x)}dx$
- Si grado del numerador < grado del denominador: descomponer el denominador en factores
    - Si todas las raíces del denominador son reales: Hacer suma de fracciones simples:
      Ejemplo: $\frac{3}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-2)} \rightarrow 3 = A(x-2) + B(x+1) \rightarrow A = -1; B = 3$
    - Su un factor está en potencia >1 hay que poner la suma de fracciones con las potencias menores del factor:
      Ejemplo: $\frac{3}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2}$
    - Si el denominador tiene raíces complejas: Descomponer en suma de fracciones simples asociadas a las raíces complejas.

Ejemplos:

1.- $\int \frac{2x^2}{2x+1} dx$

Sol: Grado numerador > grado denominador: realizar la división →

$$\begin{array}{l|l} 2x^2 & 2x+1 \\ \hline -2x - x & x + \frac{1}{2} \\ \hline / \quad -x & \\ \quad +x + \frac{1}{2} & \\ \hline \quad / \quad \frac{1}{2} & \end{array}$$

$$\int \frac{2x^2}{2x+1}dx = \int \left(x - \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2x+1} \right) dx = \boxed{\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \ln|3x+1| + C}$$

2.- $\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx$

Sol: Grado numerador < grado denominador: factorizar denominador $x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2) + b(x-3)}{(x-3)(x-2)}$$

Al igualar los numeradores: 1 = a(x-2) + b(x-3) → Para *x= 2*: 1 = - b ; para *x=3*: 1 = a

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6}dx = \int \frac{1}{x-3}dx - \int \frac{1}{x-2}dx = Ln|x-3| - Ln|x-2| + C$$

3.- $\int \frac{x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 5}{x^3 - x^2 - x - 1}$

Primero: hacer división para que quede con numerador de grado menor al denominador:

$$\frac{x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 5}{x^3 - x^2 - x - 1} = x - \frac{x-5}{x^3 - x^2 - x - 1} \rightarrow \int \frac{x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 5}{x^3 - x^2 - x - 1} = \int x \, dx - \int \frac{x-5}{x^3 - x^2 - x - 1} dx$$

Segundo: Factorizar la 2ª integral: $\int \frac{x-5}{x^3 - x^2 - x - 1} dx$

$$\frac{x-5}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{x-5}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}.$$

Al igualar numeradores: x - 5 = A(x + 1)² + B(x - 1)(x + 1) + C(x - 1), dar cualquier valor a x, preferentemente los ceros:

para x = -1: -6 = 2C → C = 3,

para x = 1: -4 = 4A → A = -1

para x = 0: -5 = A - B – C → B = 1

$$\int \frac{x-5}{x^3 + x^2 - x - 1}dx = \int \frac{-1}{x-1}dx + \int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{3}{(x+1)^2}dx$$

$$\int \frac{x-5}{x^3 - x^2 - x - 1} dx = -ln|x - 1| + ln|x + 1| + \frac{3}{x+1} + C = ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{3}{x+1} + C$$

Finalmente: $\int \frac{x-5}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{x^2}{2} - \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \frac{3}{x+1} + k.$

EJERCICIOS RESUELTOS DE CÁLCULO DE INTEGRALES

1.-Cálcula las siguientes integrales: ***a)*** $\int x \cdot e^x dx$ ***;*** ***b)*** $\int x \cdot sen\, x\, dx$ ***;*** ***c)*** $\int x \cdot lnx\, dx$ ***;***

Solución: Todas ellas se resuelven por partes y la fórmula del método es: $\int u.dv = u.v - \int v.du$

a) $I = \int xe^x dx.$

$$\left.\begin{matrix} u = x \\ dv = e^x.dx \end{matrix}\right\} \qquad du = dx$$

$$v = \int e^x dx = e^x \quad \rightarrow \quad I = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

b) I=$\int x\, sen\, x\,.dx$

$$\left.\begin{matrix} u = x \\ dv = sen\, x\,.dx \end{matrix}\right\} \qquad du = dx$$

$$v = \int sen\, x\, dx = -\cos x \quad \rightarrow I = -x \cos x + \int \cos x\, dx = -x \cos x + sen\, x + C$$

c) $I = \int xLxdx$

$$\left.\begin{matrix} u = Lx \\ dv = xdx \end{matrix}\right\} \qquad du = \frac{1}{x} dx$$

$$v = \int xdx = \frac{x^2}{2} \rightarrow I = \frac{x^2}{2}.Lx - \int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}.dx = \frac{x^2}{2}.Lx - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}.Lx - \frac{x^2}{4} + C$$

2.-Calcula las siguientes integrales: ***a)*** $\int x^2 \cdot e^x dx$ ***;*** ***b)*** $\int x^2 \cdot \cos 3\, xdx$

Sol: Las dos se resuelven aplicando el método de integración por partes dos veces:

a) $\int x^2 e^x dx$

$$\left.\begin{matrix} u = x^2 \\ dv = e^x\, dx \end{matrix}\right\} du = 2xdx$$

$$v = \int e^x dx = e^x \rightarrow I = x^2 e^x - \int 2xe^x dx\,;\ I = x^2 e^x - I_1 \quad (*) \text{ donde } \quad I_1 = \int 2xe^x dx$$

Hacemos nuevamente

$$\left.\begin{matrix} u = 2x \\ dv = e^x\, dx \end{matrix}\right\} \qquad du = 2dx$$

$$v = \int e^x dx = e^x \rightarrow I_1 = 2xe^x - \int 2e^x dx = 2xe^x - 2e^x$$

Resultado final: $I = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

b) $\int x^2 \cos 3\, xdx$

$$\left.\begin{matrix} u = x^2 \\ dv = \cos 3\, xdx \end{matrix}\right\} \qquad du = 2xdx$$

$$v = \int \cos 3\, xdx = \frac{1}{3}\int 3 \cos 3\, xdx = \frac{1}{3} sen\, 3\, x$$

$$I = \frac{1}{3}x^2\ sen\, 3\, x - \int \frac{2}{3} x\, sen\, 3\, xdx.$$

Aplicamos nuevamente el método de integración por partes:

$u = \frac{2}{3}x$; dv = sen3xdx.

$$du = \frac{2}{3}dx;\ \text{v=} \int \text{sen3xdx} = \frac{1}{3}\int 3\, sen\, 3\, xdx = -\frac{1}{3}\cos 3\, x$$

$$\int \frac{2}{3} x\, sen\, 3\, xdx = -\frac{2}{9} x \cos 3\, x + \int \frac{2}{9} \cos 3\, xdx = -\frac{2}{9} x \cos 3\, x + \frac{2}{27}\int 3 \cos 3\, xdx =$$

$$= -\frac{2}{9} x \cos 3x + \frac{2}{27} \operatorname{sen} 3x$$

$$I = \frac{1}{3} x^2 \operatorname{sen} 3x + \frac{2}{9} x \cos 3x - \frac{2}{27} \operatorname{sen} 3x + C$$

3.-Integra las siguientes funciones racionales:

a) $\int \frac{2x+1}{x^2+x-6}dx$; ***b)*** $\int \frac{x-1}{x^2-2x-6}dx$ ***c)*** $\int \frac{1+2x}{1+x^2}dx$; ***d)*** $\int \frac{x^2+1}{x-1}dx$

Solución:

a) La primera es inmediata ya que el numerador es exactamente la derivada del denominador, por tanto,

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x-6}dx = L\left|x^2+x-6\right| + C$$

b) La segunda se resuelve buscando la derivada del denominador:

$$\int \frac{x-1}{x^2-2x-6}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x-6}dx = \frac{1}{2}.L\left|x^2-2x-6\right| + C$$

c) La tercera la descomponemos en dos integrales:

$$\int \frac{1+2x}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{1+x^2}dx + \int \frac{2x}{1+x^2}dx = arctg\, x + L(1+x^2) + C$$

d) La cuarta se resuelve realizando previamente la división. Y podemos realizarla por Ruffini

Hecha la división se obtiene de cociente x+1 y de resto 2

$$\int \frac{x^2+1}{x-1}dx = \int (x+1+\frac{2}{x-1})dx = \frac{x^2}{2} + x + 2L|x-1| + C$$

4.- ***I***$=\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx$

Como no puede obtenerse en el numerador la derivada del denominador, utilizaremos el método de descomposición en fracciones simples, ya que el denominador tiene raices reales.

$$x^2-5x+6=0 \Rightarrow x = \frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2} = \frac{5\pm 1}{2} = \begin{cases}3\\2\end{cases}$$

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \frac{2x-1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-3)(x-2)}$$

Como los numeradores son iguales los denominadores también lo serán:

$$2x+1 = A(x-2) + B(x-3)$$

Para x = 3, 7 = A; Para x = 2, 5 = – B

(A x se le han dado los valores de las raices del denominador.).

Ahora procedemos de la siguiente manera:

$$I=\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx = \int \frac{7}{x-3}dx + \int \frac{-5}{x-2}dx = 7L\left|x-3\right| - 5L\left|x-2\right|$$

5.-Calcula por el método más adecuado las siguientes integrales:

a) $\int \frac{1}{(x-1)^2}dx$; ***b)*** $\int \frac{x-1}{3x^2-6x+5}dx$

a) La primera la resolvemos por un sencillo cambio de variable: $x-1=t \Rightarrow dx=dt$

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}dx = \int \frac{1}{t^2}dt = \int t^{-2}dt = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x-1} + C$$

b) La segunda es una integral en la que el numerador puede transformarse en la derivada del denominor:

$$\int \frac{x-1}{3x^2-6x+5}dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x-6}{3x^2-6x+5}dx = \frac{1}{6}L\left|3x^2-6x+5\right| + C$$

6.-La función f(x)=2x+5 tiene infinitas primitivas que difieren en una constante. ¿Cuál de estas funciones toma el valor 18 para x=2?

$\int(2x+5).dx = x^2 + 5x + C$ Como toma el valor 18 para x=2 resulta: $2^2+5.2+C=18 \Rightarrow C=4$.

La función buscada es: $F(x)=x^2+5x+4$

7.-Halla una función cuya derivada sea $f(x)=4x^2-7x^2+5x-1$ y que se anule para x=1.

Buscamos la integral indefinida de f(x) que es: $\int(4x^3-7x^2+5x-1).dx = x^4-\frac{7x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-x+C$

Como se anula para x=1 tenemos: $1^4-\frac{7.1^3}{3}+\frac{5.1^2}{2}-1+C=0$ y se obtiene que C= - 1/6,

Por tanto, la función buscada es $F(x)=x^4-\frac{7x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-x-\frac{1}{6}$

8.-Halla la función G tal que G"(x)=6x+1; G(0)=1 y G(1)=0

Nos dan la segunda derivada por lo que tenemos que integrar dos veces:

$G'(x)=\int(6x+1)dx=3x^2+x+C$ $G(x)=\int(3x^2+x+C)dx=x^3+\frac{1}{2}x^2+Cx+D$

De G(0)=1 resulta: D=1 , (después de sustituir la x por 0.)

De G(1)=0 obtenemos: 1+1/2+C+1=0 ,(después de sustituir la x por 1) por lo que C = -5/2.

La función que buscamos es la siguiente: $G(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+1$

9.-Dada la función f(x)=6x halla la primitiva que pasa por el punto A(1,2).

Sol: Hallamos la integral indefinida: $\int 6x dx=3x^2+C$

que es el conjunto de todas sus primitivas.

Ahora buscamos la que pasa por el punto (1,2):

$3.1^2+C=2$ lo que indica que C= –1, por tanto, la primitiva buscada es $F(x)=3x^2-1$

10.-Resolver la integral $\int sen^5 x\, dx$

Sol: Es impar en senx por lo que hacemos el cambio cosx=t

con lo que -senx.dx=dt. Entonces:

$$\int sen^5\ x\,.\,dx=\int sen^4\ x\,.\,sen\,x\,.\,dx=\int sen^2\ x\,.\,sen^2\ x\,.\,sen\,x\,.\,dx=$$
$$=\int(1-cos^2\ x)(1-cos^2\ x).\,sen\,x\,.\,dx=\int(1-t^2)^2\,.\,(-dt)=$$
$$=-\int(1-2t^2+t^4).\,dt=-(t-\frac{2t^3}{3}+\frac{t^5}{5})+C=-t+\frac{2t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+C=$$
$$=-cos\,x+\frac{2\,cos^3\,x}{3}-\frac{cox^5x}{5}+C$$

11.- Calcula por el método más adecuado la siguiente integral: $I=\int\frac{cos\,x}{1-cos\,x}.\,dx$

$$I=\int\frac{cos\,x}{1-cos\,x}.\,dx=\int\frac{cos\,x\,(1+cos\,x)}{(1-cos\,x)(1+cos\,x)}.\,dx=$$
$$=\int\frac{cos\,x(1+cos\,x)}{1-cos^2\,x}.\,dx=\int\frac{cos\,x+cos^2\,x}{sen^2\,x}dx=$$
$$=\int\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}dx+\int\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}dx=\int\frac{cos\,x}{sen^2\,x}dx+\int\frac{1-sen^2\,x}{sen^2\,x}dx=$$
$$=\int\frac{cos\,x}{sen^2\,x}dx+\int\frac{1}{sen^2\,x}dx-\int dx=I_1-\text{ctgx}+x+C$$

Resolvemos ahora la integral $I_1=\int\frac{cos\,x}{sen^2\,x}dx$ haciendo el cambio senx=t ; cosxdx=dt y entonces $I_1=\int\frac{cos\,x}{sen^2\,x}dx=\int\frac{dt}{t^2}=\int t^{-2}dt=\frac{t^{-1}}{-1}=-\frac{1}{t}=-\frac{1}{sen\,x}$

12.-Resuelve la integral siguiente: $I = \int \frac{x-3}{x^2+49} dx$

La descomponemos en dos integrales. En la primera podemos buscar en el numerador la derivada del denominador y en la segunda buscamos el arco tangente

$$I = \int \frac{x}{x^2+49} dx - \int \frac{3}{x^2+49} dx = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int \frac{x}{x^2+49} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+49} dx = L(x^2 + 49)$$

$$I_2 = \int \frac{3}{x^2+49} dx = \int \frac{3/49}{x^2/49 + 49/49} dx = \frac{3}{49} \int \frac{1}{1+(x/7)^2} dx$$

Haciendo el cambio x/7=t resulta x=7t y por tanto dx=7dt por lo que

$$I_2 = \frac{3}{49} \int \frac{1}{1+t^2} . 7dt = \frac{21}{49} \int \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{3}{7} arctg\ t = \frac{3}{7} arctg \frac{x}{7}$$

13.-Calcula por el método más adecuado la integral siguiente: $\int \frac{(Lx)^3}{x} dx$

El método más adecuado es el de sustitución o cambio de variable: $Lx = t$, $\frac{1}{x}$ dx = dt

$$\int \frac{(Lx)^3}{x} dx = \int (Lx)^3 . \frac{1}{x} dx = \int t^3\, dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{(Lx)^4}{4} + C$$

14.-Resuelva la integral $\int (x-1)e^x\, dx$ por partes

$$\left.\begin{matrix} u = x-1 \\ dv = e^x dx \end{matrix}\right\} \quad du = dx \;; \quad v = \int e^x dx = e^x \;; \quad \int u\ dv = u\,v - \int v\ du$$

$$\int (x-1)e^x dx = (x-1)e^x - \int e^x dx = (x-1)e^x - e^x + C$$

15.-Resuelve la siguiente integral por partes: $I = \int \cos^2 x\, dx$ por 2 métodos

Método por partes:

$$\left.\begin{matrix} u = \cos x \\ dv = \cos x\, dx \end{matrix}\right\} \quad du = -\,sen\,x\,dx$$

$v = \int \cos x\,dx = sen\,x \rightarrow\ I = \int \cos^2 x\,dx = \int \cos x \cos x\,dx = sen\,x \cos x + \int sen^2\ x\,dx$

$I = sen\,x \cos x + \int (1-\cos^2 x)dx \rightarrow\ I = sen\,x \cos x + \int dx - \int \cos^2 x\,dx$ →Volvemos a tener la misma:

$$I = \operatorname{sen} x \cos x + x - I$$

$$2I = \operatorname{sen} x \cos x + x$$

$$I = \frac{\operatorname{sen} x \cos x + x}{2} + C$$

Método 2:

Descomponiendo en las relaciones trigonométricas: $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ y $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2}\, dx + \frac{1}{2\int \cos 2x\, dx = } \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2x}{2} + k$$

16.-Resuelve la siguiente integral por partes: $\int xLn(1+x)dx$

$$\left.\begin{matrix} u = L(1+x) \\ dv = xdx \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} du = \dfrac{1}{1+x}dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \qquad \int u\ dv = u\,v - \int v\ du$$

$$I = \frac{x^2}{2}L|1+x| - \int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{1+x}dx = \frac{x^2}{2}L(1+x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x}dx$$

Dividiendo x^2 entre **x+1** se obtiene **x-1** de cociente y **1** de resto, por tanto:

$$I = \frac{x^2}{2}L|1+x| - \frac{1}{2}\int(x-1+\frac{1}{x+1})dx \ \rightarrow\ I = \frac{x^2}{2}L|1+x| - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x + L|x+1|\right) + C$$

17.-Resuelve la integral trigonométrica: $\int \frac{sen\,x + tg\,x}{cos\,x}dx$

$$I = \int \frac{sen\,x + tg\,x}{cos\,x} = \int \frac{sen\,x}{cos\,x}dx + \int \frac{sen\,x}{cos^2 x}dx = I_1 + I_2$$

La primera la ponemos de forma que el numerador sea la derivada del denominador:

$$I_1 = \int \frac{sen\,x}{cos\,x}dx = -\int \frac{-sen\,x}{cos\,x}dx = -L|cos\,x|$$

Para la segunda hacemos un cambio de variable:

$$I_2 = \int \frac{sen\,x}{cos^2 x}dx$$

cosx=t ; -senxdx=dt

$$I_2 = \int \frac{-dt}{t^2} = -\int t^{-2}dt = -\left(\frac{t^{-1}}{-1}\right) = \frac{1}{t} = \frac{1}{cos\,x}$$

18. $\int \frac{8}{x^2-2x+3}dx$

Las raíces del denominador son imaginarias. En este caso se procede de la siguiente manera:

$x^2-2x+3 = (x-\alpha)^2+\beta$; es decir, $x^2-2x+3 = x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta$

Identificando coeficientes se obtiene: α=1; β=2.

Entonces resulta: $\int \frac{8}{x^2-2x+3}dx = \int \frac{8}{(x-1)^2+2}dx = \int \frac{8/2}{\frac{(x-1)^2}{2}+1}dx = \int \frac{4}{\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx$

Si hacemos el cambio $\frac{x-1}{\sqrt{2}} = t$ se obtiene que $dx = \sqrt{2}dt$ y llevandolo a la integral planteada,

$$\int \frac{8}{x^2-2x+3}dx = \int \frac{4}{t^2+1}\sqrt{2}dt = 4\sqrt{2}\,arctg\,t = 4\sqrt{2}\,arctg\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C$$

19. $\int \frac{3x-1}{x^2+x}dx$

Sol: Descomposición en fracciones simples: $\frac{3x-1}{x^2+x} = \frac{3x-1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+bx}{x(x+1)}$

Igualar numeradores: $3x-1 = a(x+1)+bx$ Las raices del denominador son **0** y –**1:**

Dar valores a la x, preferentemente las raíces: Para x= –1, b = 4 y Para x = 0, a = –1

$$\int \frac{3x-1}{x^2+x}dx = \int \frac{-1}{x}dx + \int \frac{4}{x+1}dx = \boldsymbol{-Ln|x| + 4Ln|x+1| + C}$$

19.-Resuelve la siguiente integral: $\int \frac{dx}{x(x-1)^2}$

Estamos en el caso en que el denominador tiene raíces múltiples. Las descomposición tenemos que hacerla de la siguiente forma:

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

(Si la raiz múltiple fuese de orden 3, llegariamos con las fracciones hasta $\frac{D}{(x-1)^3}$)

$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2}$ (donde hemos realizado la suma indicada)

Igualando numeradores: $1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$.

Para calcular los valores de A, B y C damos a x los valores de 0, 1 y otro valor cualquiera: 2

De ese modo obtenemos A=1, B=–1 y C=1.

Entonces:

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = L|x| - L|x-1| + \int (x-1)^{-2} dx =$$

$$= L|x| - L|x-1| + \frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} + C = L|x| - L|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

20.-Resuelve la siguiente integral: $I = \int \sqrt{25-x^2}dx$

El cambio a realizar en este tipo de integrales es $x = 5\,sen\,t$

$$dx = 5\,cos\,t\,.dt; \qquad \sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-(5\,sen\,t)^2} = \sqrt{25(1-sen^2\,t)} = 5\,cos\,t$$

Entonces: $I = \int 5\,cos\,t\,.5\,cos\,t\,.dt = 25\int cos^2\,t\,dt$. (*)

Hacemos $I_1 = \int cos^2\,t\,dt$ y la resolvemos por partes:

$cos\,t = u; \qquad cos\,t\,.dt = dv; \qquad -sen\,t\,.dt = du; \qquad v = \int cos\,t\,.dt = sen\,t$

$$I_1 = sen\,t\,.cos\,t + \int sen^2\,t\,.dt = sen\,t\,.cos\,t + \int (1-cos^2\,t)dt = sen\,t\,.cos\,t + \int dt - \int cos^2\,t\,.dt$$

Es decir, $I_1 = set.\,cos\,t + t - I_1$; y por tanto, $I_1 = \frac{sen\,t.cos\,t+t}{2}$

Resultado que llevado a (*) nos da $I = \frac{25}{2}(sen\,t\,.cos\,t + t)$. Si deshacemos el cambio de variable:

$$sen\,t = \frac{x}{5};\ \text{y de la relación}\ sen^2\,t + cos^2\,t = 1,\ \text{sale que}\ cos\,t = \frac{\sqrt{25-x^2}}{5}$$

Finalmente queda: $I = \frac{1}{2}x\sqrt{25-x^2} + \frac{25}{2}arcsen\frac{x}{5} + C$

21.-Resuelve la siguiente integral: $I = \int x \cdot \sqrt{x+5}\,dx$

Para eliminar la raíz, hacemos el cambio: x + 5 = t^2 → x = t^2 -5 → dx = 2t

I= $\int (t^2-5) \cdot \sqrt{t^2} \cdot 2t\,dt = \int (t^2-5)t \cdot 2t\,dt = \int (2t^4 - 10t^2)dt = \frac{2t^5}{5} - \frac{10t^3}{3} + k$

Luego deshacemos el cambio: I = $\frac{2\sqrt{(x+5)^5}}{5} - \frac{10\sqrt{(x+5)^3}}{3}$ + k

22.-Resuelve la siguiente integral: $I = \int \sqrt{1-x^2}\,dx$

Cambio trigonométrico: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha \rightarrow x = \sin\alpha \rightarrow dx = \cos\alpha \cdot d\alpha$

I = $\int \sqrt{1-sin^2\,\alpha} \cdot cos\,\alpha\,d\alpha = \int \sqrt{cos^2\alpha} \cdot \cos\alpha\,d\alpha = \int \boldsymbol{cos^2\alpha}\,d\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{sin2\alpha}{4} + k$ *(ver ejer. 15)*

Deshaciendo el cambio: I = $\frac{arc\sin x}{2} + \frac{\sin(2\,arc\sin x)}{4}$ +k

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1.- Resolver la integral: $I = \int \frac{1}{sen\,x} dx$

(Indicación: Multiplica y divide por senx) $Sol: -\frac{1}{2} L(\cos x + 1) + \frac{1}{2} L|\cos x - 1| + C$

2.- Resuelve $I = \int \frac{dx}{1 + sen\,x}$

(Indicación: multiplica y divide por el conjugado del denominador) $Sol: tg\,x - \frac{1}{\cos x} + C$

3.- Halla el valor de la siguiente integral: $I = \int \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$

Sol. Buscando el arco seno resulta: $I = a.arcsen\frac{x}{a} + C$

4.- Resuelve la integral siguiente: $I = \int \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x+2}} dx$

Sol: Se hace el cambio $x + 2 = t^{m.c.m(indices)} = t^6$ y se obtiene

$I = 2\sqrt{x+2} - 3\sqrt[3]{x+2} + 6\sqrt[6]{x+2} - 6L\left|1 + \sqrt[6]{x+2}\right| + C$

5.- Resuelve: $I = \int \frac{1}{\sqrt{7 + 6x - x^2}} dx$

Sol: Eliminamos el término en x haciendo el cambio x=t–b/2 . Después buscamos el arco seno y se obtiene $I = arcsen\frac{x-3}{4} + C$

6.- Demostrar que $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a}} dx = L\left|x + \sqrt{x^2 - a} + C\right|$

Sol: Hágase el cambio $\sqrt{x^2 - a} = t - x$

7.- Comprueba que $\int \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = 2L\left|x + \sqrt{x^2 + 4} + C\right|$

8.- Resuelve: $\int \frac{dx}{x^2 + 8x + 20}$ Sol. $\frac{1}{2} arctg\frac{x+4}{2}$

9.- Utilizando el cambio de variable e^x = t, calcula $\int \frac{e^{2x} - 3e^x}{e^x + 1} dx$

Sol. $e^x - 4L(e^x + 1)$

10.- Calcula la siguiente integral: $I = \int \frac{1 + sen^2 x}{sen\,x\cos x} dx$

(Indicación: Sustituye el 1 por $sen^2 x + \cos^2 x$, después la descompones en suma de dos integrales y cada una de ellas se resuelve por cambio de variable)

Sol. $-2L(\cos x) + L(senx)$

11.- Resuelve: $I = \int \frac{1}{e^x + 1} dx$ Sol. $I = L(e^x) - L(e^x + 1) + C$

INTEGRAL DEFINIDA - CALCULO DE AREAS

- *Interpretación geométrica*: $\int_a^b f(x)dx$ es el área de la región limitada por las rectas x = a, x = b, y = 0 (eje de abscisa) y la gráfica de la función $f(x)$.
- *Teorema del valor medio*: $\int_a^b f(x)dx$ = (b - a)· f(c)
- *Regla de Barrow:* (integral definida): $\int_a^b f(x)dx$ = F(b) - F(a)
- *Cálculo de áreas*:
  - Para una función con OX: Comprobar si hay corte con OX entre los intervalos de integración dados
  - Para una función que corta a OX: Buscar los puntos de corte con OX para usarlos como intevalos
  - Para dos funciones que se cortan: Integrar la resta de las funciones entre los puntos de corte

0. - *Calcular la integral* $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx$

Solución:

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$x = A(x+1)+B(x-1)$$

$$\text{Para x = -1, } B = \frac{1}{2} \quad ; \quad \text{Para x = 1, A} = \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{x}{x^2-1}dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1}dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x+1}dx = \frac{1}{2}L|x-1| + \frac{1}{2}L|x+1| =$$

$$= L\left(\sqrt{x-1}.\sqrt{x+1}\right)$$

Por tanto,

$$\int \frac{x}{x^2-1}dx = \left[L(\sqrt{x-1}\sqrt{x+1})\right]_2^3 = \boldsymbol{Ln\sqrt{8} - Ln\sqrt{3}}$$

1.- *Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función* **y = x³ - 3x² - x + 3,** *las rectas* **x = -2, x = 2** y *el eje OX*

1º- Resolver la ecuación: y = x³ - 3x² - x + 3 = 0 (para calcular las abscisa de los puntos de corte de la gráfica de f con el eje OX); x_1 = **-1**, x_2 = 1 y x_3 = 3, este último fuera del intervalo [-2, 2] , con lo que no se tiene en cuenta.

2º- Calcular la suma de los valores absolutos de las integrales definidas:

$$\left|\int_{-2}^{-1}(x^3 - 3x^2 - x + 3)dx\right| + \left|\int_{-1}^{1}(x^3 - 3x^2 - x + 3)dx\right| + \left|\int_{1}^{2}(x^3 - 3x^2 - x + 3)dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-2}^{-1}\right|$$

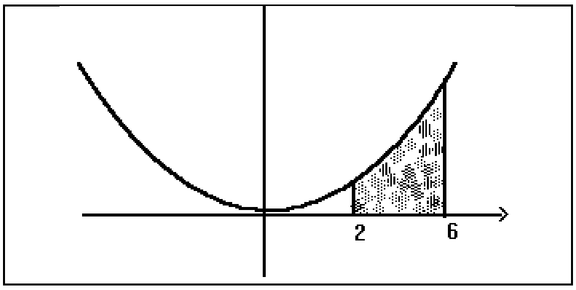
$$+ \left|\left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{1}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{1}^{2}\right| = \left|-\frac{25}{4}\right| + |4| + \left|-\frac{7}{4}\right| = 12u^2.$$

2.-Calcula el área del recinto limitado por la parábola y=x^2 y las rectas y=0, x=2, x=6.

Solución:

La recta **y=0** es el eje **x.**

El área del recinto limitado por una función **f(x),** el eje **x** y la rectas **x=a, x=b,** viene dada por el valor absoluto de la integral $I = \int_a^b f(x)dx$ siempre que la función **f(x)** no corte al eje **x** en ningún punto interior del intervalo [a,b]



$$I = \int_2^6 x^2\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^6 = \frac{6^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{208}{3}$$

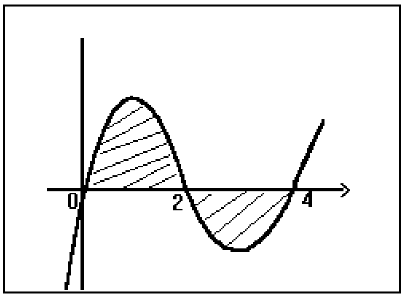
$$\text{Area} = \left|\frac{208}{3}\right| = \frac{208}{3}\ u^2$$

3.- *Calcula el área limitada por la curva* ***y = x^3 – $6x^2$ + 8x*** *y el eje* ***x***

Calculamos los puntos de corte de la curva con el eje **x :**

$$x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \quad \rightarrow \quad (x^2 - 6x + 8)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2; x = 4 \end{cases}$$

Los puntos de corte obtenidos son **0**, **2** y **4** , por tanto el área pedida se halla resolviendo las integrales:



$$I_1 = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx$$

$$I_2 = \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx$$

$$I_1 = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 = 4;$$

$$I_2 = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_2^4 = -4;$$

Area= |4 |+ |-4 | = **8 u^2**

4.- Calcula el área del recinto limitado por la parábola de ecuación ***y = 9 –x^2*** y el eje de abscisas**.**

Determinamos los puntos de corte de la curva con el eje **x:** 9-x^2=0 → x=3 ; x=-3

$$I = \int_{-3}^3 (9 - x^2)dx = \left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^3 = (27 - 9) - (-27 + 9) = 36$$; Area= |36 | = **36 u^2**

5.- *Halla el área comprendida entre las parábolas* ***y = 8 – x^2 ; y = x^2***

Buscamos los puntos de corte de las dos curvas: $8 - x^2 = x^2 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

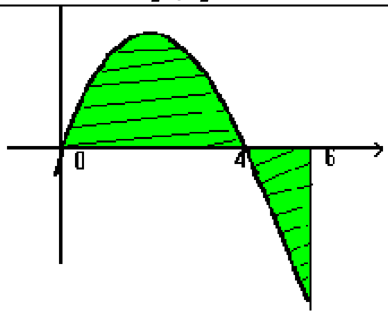
Los límites de integración son: -2 y 2

La función a integrar es la diferencia de las dos funciones: $8 - x^2 - x^2 = 8 - 2x^2$,

por tanto, $I = \int_{-2}^2 (8 - 2x^2)dx = \left[8x - \frac{2x^3}{3}\right]_{-2}^2$

$$I = (16 - \frac{16}{3}) - (-16 - \frac{-16}{3}) = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3} \quad ; \quad Area = \left|\frac{64}{3}\right| u^2 = \frac{64}{3} u^2$$

6.-*Calcula el área del recinto limitado por la parábola* ***y = 4x - x²*** *y el eje de abscisas en el intervalo* ***[0,6]***



Comprobamos si hay puntos de corte dentro del intervalo [0,6].

$4x-x^2 = 0 \rightarrow x(4-x)=0 \rightarrow x=0;\ x=4$

Como hay un punto de corte dentro del intervalo [0,6] que es x = 4, las integrales a plantear son:

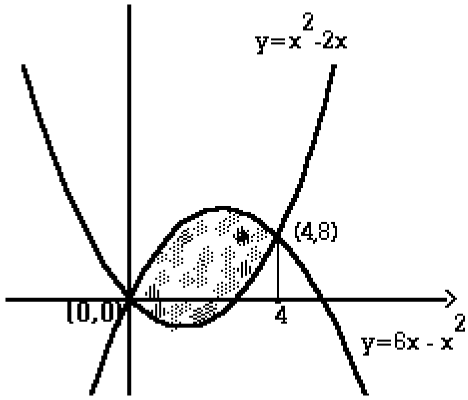
$$I_1 = \int_0^4 (4x - x^2)dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4$$

$$I_1 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{96-64}{3} = \frac{32}{3}$$

$$I_2 = \int_4^6 (4x - x^2)dx \rightarrow I_2 = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_4^6 = (64-72) - \frac{32}{3} = -\frac{56}{3}$$

$\rightarrow$ Area= $\left|\frac{32}{3}\right| + \left|-\frac{56}{3}\right| = \frac{88}{3}$; Area $= \frac{88}{3}u^2$

7.-*Halla el área comprendida entre las curvas* ***y=6x-x²*** ; ***y=x²-2x***



Igualamos ambas curvas para encontrar los puntos de intersección:

$$6x - x^2 = x^2 - 2x \Rightarrow 2x^2 - 8x = 0$$

$$2x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0;\quad x = 4$$

Función a integrar:

$$(x^2 - 2x) - (6x - x^2) = 2x^2 - 8x$$

$$I = \int_0^4 (2x^2 - 8x)dx = \left[\frac{2x^3}{3} - 4x^2\right]_0^4 =$$

$= \frac{128-192}{3} = -\frac{64}{3}$ Area= $\left|-\frac{64}{3}\right| = \frac{64}{3}$ u²

8.-*Area del recinto limitado por la parábola* ***y=3x-x²*** *y la recta* ***y=x-3***

Solución:

Límites de integración: $3x - x^2 = x - 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

Resolviendo la ecuación se obtiene x=3; x=-1

Función a integrar: $I = \int_{-1}^{3} (x^2 - 2x - 3)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right]_{-1}^{3} = -\frac{32}{3}$; Area= $\left|-\frac{32}{3}\right| = \frac{32}{3}u^2$

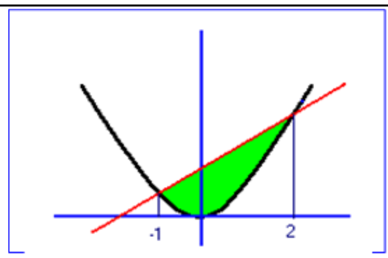
9.-*Halla el área del recinto limitado por la parábola de ecuación* ***y=x²*** *, la recta de ecuación* ***y=x+2*** *y el eje* ***OX.***

- Límites de integración: Son los puntos de corte de la parábola y la recta:

$x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

- Función a integrar: $x + 2 - x^2$ (Diferencia de las dos funciones)

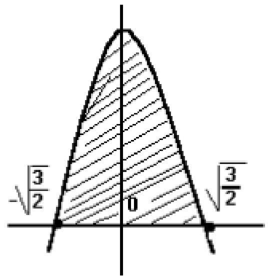


resolver la integral: $I = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$;

$$Area = \left|\frac{9}{2}\right| u^2 = \frac{9}{2}u^2$$

10.-*Calcula el área limitada por la parábola de ecuación* ***y=2(1-x²)*** *y la recta de ecuación* ***y = 0***

Como la curva es simétrica respecto al eje de ordenadas, podemos integrar entre 0 y $\sqrt{\frac{3}{2}}$ y multiplicar el resultado por 2.



Límites de integración: $2(1-x^2)=-1 \Rightarrow 3=2x^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

Función a integrar: $2(1-x^2)-(-1)=3-2x^2$

$I=\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}}(3-2x^2)dx=\left[3x-\frac{2x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}}=2\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \rightarrow \quad Area=4\sqrt{\frac{3}{2}}u^2$

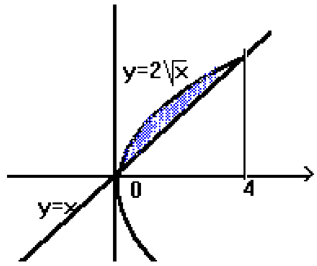
11.-*Calcula el área del recinto limitado por la curva de ecuación* $y=2\sqrt{x}$ *y la recta* ***y = x.***

Límites de integración:

$$2\sqrt{x}=x \Rightarrow 4x=x^2 \Rightarrow x^2-4x=0$$

$$x(x-4)=0 \Rightarrow x=0;\quad x=4$$

Función a integrar: $2\sqrt{x}-x$



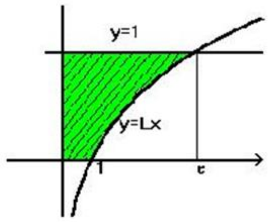
$I=\int_0^4(2\sqrt{x}-x)dx=\int_0^4(2x^{\frac{1}{2}}-x)dx=\left[\frac{4\sqrt{x^3}}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_0^4=\frac{8}{3}$; Area=$\frac{8}{3}u^2$

12.-*Halla el área limitada por las gráficas de las funciones* ***y=Lx, y=1*** *y los ejes de coordenadas.*

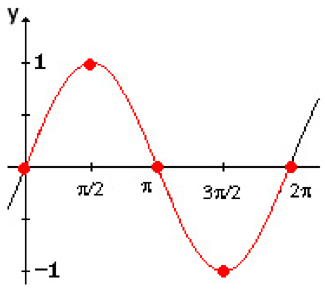
Área = diferencia entre las integrales $\int_0^e 1.dx$ y $\int_1^e Lx.dx$

$I_1=\int_0^e 1.dx=[x]_0^e=e$ $\boldsymbol{I_2=\int_1^e Lxdx=[xLx-x]_1^e=(e-e)-(0-1)=1}$ (por partes):

Area=$I_1 - I_2$ = e – 1 u²



13.- *Halla el área limitada por la función* ***y= senx*** *, en el primer periodo (entre 0 y 2π)*



Comprobamos si hay puntos de corte dentro del intervalo.

Como se anula en: *sen* π = 0 integramos entre [0,π] y entre [π, 2π]:

$$\int_0^{2\pi} sen\,xdx = \int_0^{\pi} sen\,x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} sen\,x\,dx = [-cosx]_0^{\pi} + [-cosx]_{\pi}^{2\pi}$$

Como el recinto está compuesto por dos áreas iguales:

A = 2·$[-cosx]_0^{\pi}$ = 2 | - cos π + cos 0 | = 2(1 +1) = **4 u²**

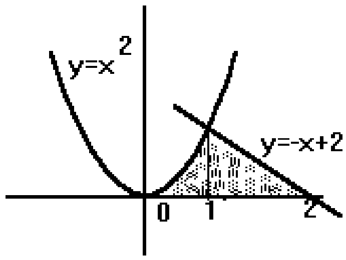
14.- *Halla el área limitada por la parábola* $y=x^2$*, la recta de ecuación* $y=-x+2$ *y el eje OX*

Punto de corte de la parábola y el eje OX:

$$x^2=0 \Rightarrow x=0$$

Punto de corte de la recta y el eje =OX:

$$-x+2=0 \Rightarrow x=2$$



Punto de corte de la parábola y la recta:

$$x^2=-x+2 \Rightarrow x^2+x-2=0 \;\rightarrow\; x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}1\\-2\end{cases}$$

La solución x = -2 está fuera del eje OX, por tanto, sólo hemos de considerar el valor x =1

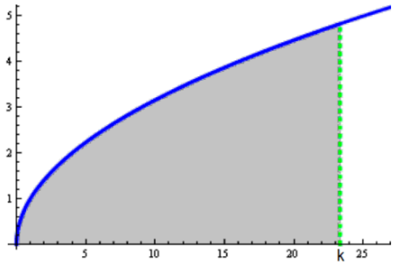
Observando el dibujo, hemos de resolver las integrales siguientes:

$I_1=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3};\qquad I_2=\int_1^2(-x+2)dx=\frac{1}{2};\qquad Area=\left|\frac{1}{3}\right|+\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{5}{6}u^2$

15.- *Determina el valor de k de forma que l'àrea entre la funció $f(x) = \sqrt{x}$, la recta vertical x = k i els eixos de coordenades sigui igual a 75.2*

$$\int \sqrt{x}dx = \int x^{1/2}dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2x^{3/2}}{3} + C$$

$$\grave{A}rea = \int_0^k \sqrt{x}dx = \frac{2k^{3/2}}{3} - \frac{2\cdot 0^{3/2}}{3} = \frac{2k^{3/2}}{3}$$



$$\frac{2k^{3/2}}{3} = 75.2 \Rightarrow k^{3/2} = \frac{3\cdot 75.2}{2} \Rightarrow k^{3/2} = 112.8 \Rightarrow k = 112.8^{2/3} \cong 23.3457$$

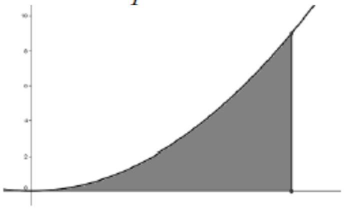
16. Determina el valor de p positiu per al qual la gràfica de f (x) = x^2 , la seva recta tangent pel punt d'abscissa x = p i l'eix d'abscisses determinen un recinte d'àrea igual a 27/12.

recta tangent: $a = f'(p) = 2p$, $b = f(p) - a\cdot p = p^2 - 2p\cdot p = -p^2$, $y = ax + b = 2px - p^2$

talla l'eix X al punt $2px - p^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{p^2}{2p} = \frac{p}{2}$, és a dir, al punt mig del segment.

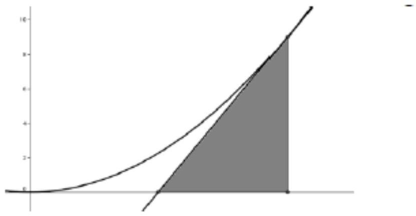
$$A_1 = \int_0^p x^2dx = F(p) - F(0) = \frac{p^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{p^3}{3}$$

$$F(x) = \int x^2dx = \frac{x^3}{3}$$



L'àrea B és l'àrea d'un triangle que té base $p/2$ i altura $f(p) = p^2$, per tant no cal fer cap integral, apliquem la fórmula de l'àrea del triangle:

$$B = \frac{p/2\cdot p^2}{2} = \frac{p^3}{4}$$



Finalment, $\grave{A}rea = A - B = \frac{p^3}{3} - \frac{p^3}{4} = \frac{4p^3 - 3p^3}{12} = \frac{p^3}{12} = \frac{27}{12} \Leftrightarrow p^3 = 27 \Leftrightarrow p = 3$

(suposem $p > 0$)

17. Calcula l'àrea determinada per les gràfiques de f (x) = sin x i g(x) =x^2 .
(Observació: L'equació sin x = x^2 només té com a solució x = 0 i x = 0.8767)

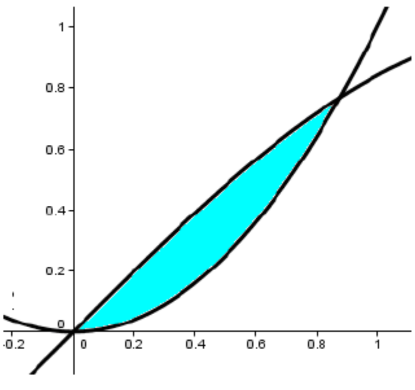
$$A = \int_0^{0.8767} \sin x - x^2\, dx = F(0.8767) - F(0) \text{ on } F(x) = \int \sin x - x^2\, dx$$

$$F(x) = \int \sin x - x^2\, dx = \int \sin x\, dx - \int x^2\, dx = -\cos x - \frac{x^3}{3} + C$$

$$F(0.8767) = -\cos(0.8767) - \frac{0.8767^3}{3} \cong -0.8643$$

$$F(0) = -\cos(0) - \frac{0^3}{3} = -1$$

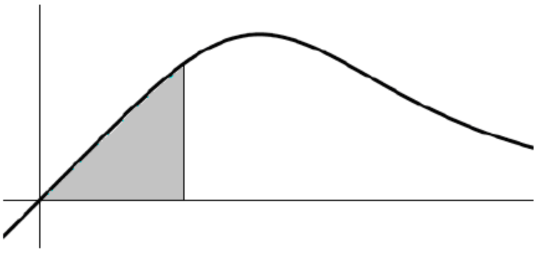
$$A = \int_0^{0.8767} \sin x - x^2\, dx = F(0.8767) - F(0) \cong -0.8643 - (-1) \cong 0.1357$$



18. Calculeu l'àrea entre la corba $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ i les rectes x=0, x=1/2 i l'eix OX.

$$A = \int_0^{1/2} \frac{x}{1+x^4} dx = F(1/2) - F(0)$$

Fem un canvi de variable $u = x^2 \rightarrow u' = 2x$



$$F(x) = \int \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^4} 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2} du = \frac{1}{2}\arctan(u) + C = \frac{1}{2}\arctan(x^2) + C$$

$$A = \int_0^{1/2} \frac{x}{1+x^4} dx = F(1/2) - F(0) \cong 0.122489\text{-}0 \cong 0.122489$$

PAU Sept 2017. Sigui la funció $\boldsymbol{f(x) = \frac{sinx}{cos^2x}}$

a) Calculeu una primitiva de la funció f (x).

b) Calculeu l'àrea limitada per la funció f (x) i l'eix de les abscisses entre les abscisses x=0 i x = π/4

a) canvi de variable $\cos x = t$ $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{-dt}{t^2} = -\int t^{-2} dt = \frac{1}{t} + C = \boxed{\frac{1}{\cos x} + C}$

b) positiva l'àrea demanada

$$\text{Àrea} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \left[\!\left[\frac{1}{\cos x}\right]\!\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{\sqrt{2}/2} - 1 =$$

$$\boxed{\frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-2}{2} = 0{,}414\, u^2}$$

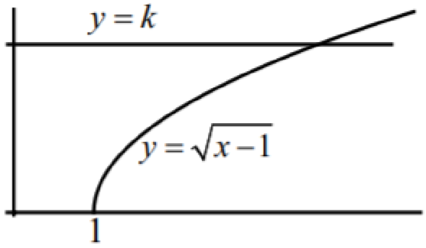
PAU Jun 2013.

Donada la funció $f(x) = \sqrt{x-1}$ i la recta horitzontal y = k, amb k > 0, 1

a) Feu un esbós del recinte limitat per les gràfiques de la funció i la recta, i els eixos de coordenades.

b) Trobeu el valor de k sabent que l'àrea d'aquest recinte és igual a 14/3.

(a)



(b) punt de tall $\sqrt{x-1} = k \Longrightarrow x = k^2 + 1$.

$$A = k(k^2+1) - \int_1^{k^2+1} (x-1)^{1/2}\, dx = k^3 + k - \left[\frac{(x-1)^{3/2}}{3/2}\right]_1^{k^2+1} = k^3 + k - \frac{2k^3}{3} = \frac{k^3}{3} + k.$$

CÁLCULO DEL VOLUMEN DE UN CUERPO

Que se genera al girar la gráfica de la función y = f(x) entre los puntos de abscisas a y b alrededor de un eje:

Alrededor del eje de abscisas: $\boxed{V = \pi\int_a^b f^2(x)dx.}$

Para calcular el volumen del cuerpo que se genera al girar la gráfica de la función $y = x\sqrt{x+1}$, entre los puntos de corte con el eje OX, alrededor de este eje, calculamos la integral definida:

$V = \pi\int_{-1}^{0}\left(x\sqrt{1+x}\right)^2 dx$ (x = -1 y x = 0 son las soluciones de la ecuación $x\sqrt{x+1} = 0$, abscisas de los puntos de corte de la gráfica de f con el eje OX).

$$V = \pi\int_{-1}^{0}\left(x\sqrt{1+x}\right)^2 dx = \pi\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} = \left[0-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\right] = \frac{\pi}{12}\ u^3.$$

Alrededor del eje de ordenadas: $\boxed{V = 2\pi\int_a^b f(x)\cdot x\cdot dx.}$

f-3-2-1) Ejemplo: para calcular el volumen del cuerpo que se genera al girar la gráfica de la función $y = x\sqrt{x+1}$, entre los puntos de corte con el eje OX, alrededor del eje de ordenadas, calculamos la integral definida:

$$V = 2\pi\int_{-1}^{0}x\left(x\sqrt{1+x}\right)dx = 2\pi\int_{-1}^{0}x^2\sqrt{1+x}\,dx.$$

Aplicando el cambio de variable $1 + x = t^2$, se tiene: $x = t^2 - 1$, $dx = 2tdt$; y los límites de integración:

si x = -1, t = 0 y

si x = 0, t = 1.

$$V = 2\pi\int_0^1\left(t^2-1\right)^2\cdot t\cdot 2tdt = 2\pi\int_0^1\left(2t^6-4t^4+2t^2\right)dt = 2\pi\left[\frac{2t^7}{7}-\frac{4t^5}{5}+\frac{2t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{32}{105}\pi\ u^3.$$