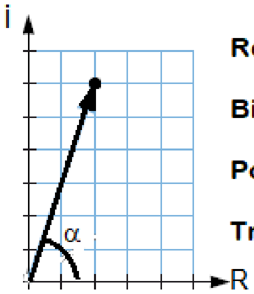
Números complejos:

- **Forma binomica**: $(\mathrm{a}+\mathrm{bi})$
  (2 +6i) → 2 es la parte real y 6i es la parte imaginaria ($i = \sqrt{-1}$)
- **Forma polar: Módulo** $_{\text{ángulo}}$
  6_{63} : → 6: módulo ; 63: argumento o ángulo



Representación gráf.

Binómica: $z = a + bi = 2 + 6i$

Polar: $z = r_\alpha = 6{,}3_{63{,}5}$

Trigonométrica: $z = r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\alpha)$

- **Conversión:**
  Conversión de forma polar a binómica: Parte real utilizar el coseno y parte imaginaria el seno:
  $z = 2_{120^\circ} \rightarrow a = 2\cdot\cos 120^\circ = -1 \qquad b = 2\cdot \mathrm{sen}\ 120^\circ = \sqrt{3} \qquad z = -1+\sqrt{3}\,i$
  Conversión de binómica a polar: módulo= $\sqrt{a^2+b^2}$ argumento: *arctan(b/a)*
  4+3 i → *módulo=* $\sqrt{4^2+3^2}$ *=5 ; ángulo = arctg(3/4) = 36,9* → *5* $_{36{,}9}$

- **Potencias de i**: se repiten en múltiplos de 4: $i = \sqrt{-1}$; $i^2 = -1$; $i^3 = -\sqrt{-1} = -i$; $i^4 = 1$
  para saber cuánto vale una potencia de i, se divide el exponente entre 4 y buscamos el resto.

- **Sumar y restar:**
  Se suma/resta la parte real del 1º con la real del 2º y la imaginaria del 1º con la imaginaria del 2º
  Ejemplo: (2+3i) + (4+6i) = 6 + 9i

- **Multiplicación**:
  En forma binómica aplicar la propiedad distributiva:
  (5 + 2 i) · (2 − 3 i) = 10 − 15i + 4i − 6i2 = 10 − 11i + 6 = 16 − 11i
  En forma polar se multiplican los módulos y se suman los argumentos.
  $6_{45} \cdot 3_{15} = (6\cdot 3)_{45+15} = 18_{60}$

- **Conjugado**: cambia el signo de la parte imaginaria: $z = 3 - 2i$, el conjugado es $\bar{z} = 3 + 2i$

- **División**: multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{3+2i}{1-2i} = \frac{(3+2i)\cdot(1+2i)}{(1-2i)\cdot(1+2i)} = \frac{3+6i+2i+4i^2}{1-(2i)^2} = \frac{3+8i-4}{1+4} = -\frac{1}{5}+\frac{8}{5}i$$

- **Potencia**:
  Forma binómica: se desarolla el binomio por Tartaglia o Newton
  Ejemplo: $(a+b)^4 = \binom{0}{4}a^4b^0 + \binom{1}{4}a^3b^1 + \binom{2}{4}a^2b^2 + \binom{3}{4}a^1b^3 + \binom{4}{4}a^0b^4$
  Forma polar: Es la potencia del módulo y el producto del ángulo. *Ejemplo*: $(2_{30})^4 = 2^4{}_{4\cdot 30}$

- **Raíz enésima:** En forma polar su módulo es la raíz enésima y su ángulo múltiplo de: (a+2kπ)/n
  Ejemplo: $\sqrt[6]{1+i}$

$$\sqrt[6]{1+i} \Rightarrow \begin{matrix} |z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \alpha = arctg\,\frac{+1}{+1} = 45^\circ \end{matrix} \Rightarrow \sqrt[6]{\left(\sqrt{2}\right)_{45^\circ}} = \sqrt[12]{2}_{\ \alpha} \quad \alpha = \frac{45^\circ + 360^\circ k}{6}$$

- Otras formas o expresiones de un número complejo:
  <u>Trigonométrica</u>: z = r(cosθ+isenθ) <u>Exponencial</u>: $z = re^{i\theta}$
- **Fórmula de Moivre**: $(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)^4 = (\cos 4\alpha + i\,\mathrm{sen}\,4\alpha)$

Ejercicios:

0.- Resuelve y expresa sus soluciones como números complejos: $x^2 - x + 1 = 0$

Sol:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot1\cdot1}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \end{cases}$$

1.- Pasar de forma polar a binómica:

a) 5_{60} → p. real = 5·cos(60) = 2,5 ; p.imag: 5·sin(60) = 4,3 → 2,5 + 4,3 i

2.- Pasar de forma binómica a polar:

a) 2+2i — Sol: mod: 2√2 ángulo: arctg 1 = π/4

b) -2 + 2i — Sol: mod: 2√2 ángulo: arctg -1 = 3π/4

c) -2 -2i — Sol: mod: 2√2 ángulo: arctg 1 = 5π/4

d) √3 + i — Sol: mod: 2 ángulo: arctg 1/√3 = π/6

3.- Calcular: $(3 + 4i)^4$

Sol 1. pasando a forma polar: $5^5{}_{53.13\cdot4} = 635_{212,52} = 625_{32,5}$

Sol 2. desarrollando en binómico: $(a+b)^4 = \binom{0}{4}a^4b^0 + \binom{1}{4}a^3b^1 + \binom{2}{4}a^2b^2 + \binom{3}{4}a^1b^3 + \binom{4}{4}a^0b^4$

4. Determina x e y para que estos números complejos sean iguales: $-x + yi$ y $7 - 6i$

(Sol: x=-7 , y=-6)

Calcular x e y para que: (2+xi)+(y+3i)=7+4i (Sol: x=1, y=5)

6.- Resuelve las siguientes operaciones. a) $(-1-i)(-4+5i)$ b) $\frac{(-2+i)(1+3i)}{-1+2i} - 2i$

Sol:

$$(-1-i)(-4+5i) = 4 - 5i + 4i + 5 = 9 - i$$

$$\frac{(-2+i)(1+3i)}{-1+2i} - 2i = \frac{(-5-5i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} - 2i = 3 - i - 2i = 3 - 3i$$

7.- Dados los números complejos. $z_1 = 4_{330°}$ $z_3 = 1 - i$ Calcula a) $(z_1)^2$ b) $(z_3)^4 \cdot \bar{z}_3$

Sol:

a) $(4_{330°})^2 = 16_{660°} = 16_{300°}$ b) $(4_{330°})^2 \cdot 1_{240°} = 16_{660°} \cdot 1_{240°} = 16_{900°} = 16_{180°} = -16$

8.- Calcula las siguientes raíces a) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27_{180°}}$ b) $\sqrt[3]{-1+i}$

Sol: a):

módulo: 3.
argumentos
$$\begin{cases} \text{Si } k=0 \rightarrow \beta_1 = \frac{180° + 0\cdot360°}{3} = 60° \\ \text{Si } k=1 \rightarrow \beta_2 = \frac{180° + 1\cdot360°}{3} = 180° \\ \text{Si } k=2 \rightarrow \beta_3 = \frac{180° + 2\cdot360°}{3} = 300° \end{cases}$$

Sol b): $\sqrt[6]{-1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{135}}$

módulo: $\sqrt[6]{2}$.
argumentos
$$\begin{cases} \text{Si } k=0 \rightarrow \beta_1 = \frac{135° + 0\cdot360°}{3} = 45° \\ \text{Si } k=1 \rightarrow \beta_2 = \frac{135° + 1\cdot360°}{3} = 165° \\ \text{Si } k=2 \rightarrow \beta_3 = \frac{135° + 2\cdot360°}{3} = 285° \end{cases}$$

9.- Calcular:

l) (3i) (−3i)= *(Soluc: 9)*

m) $(2+3i)^2$= *(Soluc: −5+12i)*

n) $(6-3i)^2$= *(Soluc: 27−36i)*

o) (2+3i) (1−i)= *(Soluc: 5+i)*

a) $\frac{1+3i}{1+i} =$ *(Sol : 2 + i)*

q) (1+i) (2−3i)= *(Soluc: 5−i)*

r) (5+i) (5−i)= *(Soluc: 26)*

s) (4+3i) (4+2i)−(2+i) (3−4i)= *(Soluc: 25i)*

m) $\frac{(5-3i)(1+i)}{\overline{1-2i}} =$ $\left(Sol: \frac{12}{5} - \frac{14}{5}i\right)$