# Ecuaciones trigonométricas

**Pasos:**

- Intentar reducir toda la expresión a una única razón trigonométrica (que todo sean senos, o cosenos, por ejemplo)
- Luego, usar la función arco correspondiente para despejar la x o el ángulo.
- Consigue que todas las razones trigonométricas sean iguales intercambiando expresiones con las siguientes fórmulas:

| | |
|---|---|
| **F. Fundamental:** $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ | |
| $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$ | $cotg\ \alpha = \dfrac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha}$ |
| $sec\ \alpha = \dfrac{1}{cos\ \alpha}$<br>$1 + tg^2\alpha = sec^2\alpha$ | $cosec\ \alpha = \dfrac{1}{sen\ \alpha}$<br>$1 + cotg^2\alpha = cosec^2\alpha$ |
| **Ángulo suma**<br>$sen(\alpha \pm B) = sen\alpha \cdot cosB \pm cos\alpha \cdot senB$<br>$cos(\alpha \pm B) = cos\alpha \cdot cosB \pm sen\alpha \cdot senB$<br>$tg(\alpha + B) = (tg\alpha + tgB) / (1 - tg\alpha \cdot tgB)$<br>$tg(\alpha - B) = (tg\alpha - tgB) / (1 + tg\alpha \cdot tgB)$ | **Ángulo doble**<br>$sen2\alpha = 2sen\alpha \cdot cos\alpha$<br>$cos2\alpha = cos^2\alpha - sen^2\alpha$<br>$tg2\alpha = (2tg\alpha) / (1 - tg2\alpha)$ |
| **Ángulo mitad**<br>$sen\alpha/2 = \pm\sqrt{((1 - cos\alpha)/2)}$<br>$cos\alpha/2 = \pm\sqrt{((1 + cos\alpha)/2)}$<br>$tg\alpha/2 = \pm\sqrt{((1-cos\alpha)/(1+cos\alpha))}$ | **Transformar sumas en productos**<br>$sen\alpha + sen\beta = 2sen((\alpha+\beta)/2) \cdot cos((\alpha-\beta)/2)$<br>$sen\alpha - sen\beta = 2cos((\alpha+\beta)/2) \cdot sen((\alpha-\beta)/2)$<br>$cos\alpha + cos\beta = 2cos((\alpha+\beta)/2) \cdot cos((\alpha-\beta)/2)$<br>$cos\alpha - cos\beta = -2sen((\alpha+\beta)/2) \cdot sen((\alpha-\beta)/2)$ |

**1)** Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas (Soluciones siguiente hoja)

a) $\mathbf{2tgx - 3\ cotgx - 1 = 0}$

b) $\mathbf{cos^2x - 3sen^2x = 0}$

c) $\mathbf{sen(2x + 60) + sen(x + 30) = 0}$

d) $\mathbf{sen^2x - cos^2x = 1/2}$

e) $\mathbf{sen2x \cdot cosx = 6sen^3x}$

f) $\mathbf{cos^2x - 3sin^2x = 0}$

g) $\mathbf{2\ tgx - 3\ ctg\ x - 1 = 0}$

h) $\mathbf{cos\ 2x = 1 + 4senx}$

i) $\mathbf{2sinx \cdot tgx = 3}$

## Soluciones

### a) $2tgx - 3\ cotgx - 1 = 0$

Transformamos cotg=1/tg: $2tgx - 3/tgx - 1 = 0$
Forma de segundo grado → $2tg^2x - tgx - 3 = 0$
Resolvemos ecuación de segundo grado, tgx=x. Obtenemos dos soluciones:
Solución 1: $tgx = 3/2 \rightarrow x = 56{,}31º + 180k$ Solución 2: $tg\ x = -1 \rightarrow x = 135º + 180k$

### b) $\cos^2x - 3sen^2x = 0$

$1 - sen^2x - 3sen^2x = 0 \rightarrow 1 - 4sen^2x = 0 \rightarrow sen^2x = 1/4 \rightarrow senx = \underline{+}1/2$
$x = arcsen(1/2) \rightarrow x_1 = 30º + 360k$ $x_2 = 150º + 360k$
$x = arcsen(-1/2) \rightarrow x_3 = 210º + 360k$ $x_4 = 330º + 360k$

### c) $sen(2x + 60) + sen(x + 30) = 0$

Convertimos la suma en un producto: sin(a+b)=sina·cosb+cosa·sinb
sen2x·cos60+cos2x·sin60+senx·cos30+cosxsen30=0
$2sen\ (((2x+60)+(x+30))/2)\cdot\cos\ (((2x+60) - (x + 30))/2) = 0$
$2sen\ (3x/2 + 45)\cdot\cos\ (x/2 + 15) = 0$ $sen\ (3x/2 + 45)\cdot\cos\ (x/2 + 15) = 0$ $sen\ (3x/2 + 45) = 0$
$\rightarrow x_1 = -30º + 120k$ $\cos\ (x/2 + 15) = 0 \rightarrow x_2 = 150º + 360k$ $x_3 = 510º + 360k$

### d) $sen^2x - \cos^2x = 1/2$

Cambiamos el signo para convertir en coseno del ángulo doble:
$sen^2x - \cos^2x = 1/2 \rightarrow \cos^2x - sen^2x = -1/2$
$\cos 2x = -1/2 \rightarrow 2x = arc\ cos\ (-1/2)$
$2x_1 = 120º + 360k \rightarrow x_1 = 60º + 180k$
$2x_2 = 240 + 360k \rightarrow x_2 = 120 + 180k$

### e) $sen2x\cdot\cos x = 6sen^3x$

Transformamos el seno del ángulo doble, y pasamos el 2 dividiendo al lado derecho.
$2senx\cdot\cos x\cdot\cos x = 6sen^3x \rightarrow senx\cdot\cos x\cdot\cos x = 3sen^3x \rightarrow senx\cdot\cos^2x - 3sen^3x = 0$

Sacamos factor común: $senx\cdot(\cos^2x - 3sen^2x) = 0$
Producto de dos cosas que dan cero, o primer factor es cero o bien el segundo.
Así, por un lado: $senx = 0 \rightarrow x_1 = 0º + 180k$
Por otro: $\cos^2x - 3sen^2x = 0$
$1 - sen^2x - 3sen^2x = 0 \rightarrow 1 - 4sen^2x = 0 \rightarrow sen^2x = 1/4 \rightarrow senx = \underline{+}1/2$
$x = arcsen1/2 \rightarrow x_2 = 30º + 360k$ $x3 = 120º + 360k$
$x = arcsen(-1/2) \rightarrow x_4 = 210º + 360k$ $x5 = 330º + 360k$

### f) $2\cos x = 3tgx$

$2\cos x = 3senx/\cos x$
$2\cos^2x = 3senx$
$2(1 - sen^2x) = 3\ senx$
$2 - 2sen^2x - 3senx = 0$

Resolvemos como una ecuación de segundo grado en la que la incógnita es senx. 2 soluciones: Solución 1: $senx = 1/2 \rightarrow x1 = 30º + 360k$ $x2 = 150º + 360k$
Solución 2: $senx = -2 \rightarrow$ se descarta, porque ningún seno o coseno puede valer más de 1 o -1.

### h) $2sinx\cdot tgx = 3$ $\rightarrow$ 2sinx·sinx/cosx=3

$\boxed{\cos^2 x - 3sen^2 x = 0}$

$1 - sen^2 x - 3sen^2 x = 0 \quad 1 - 4sen^2 x = 0 \quad sen^2 x = \frac{1}{4} \quad sen\,x = \pm\frac{1}{2} \quad x = \arcsen\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 30° + 360°k \\ x_2 = 150° + 360°k \end{cases}$

$\boxed{2tg\,x - 3\cotg\ x - 1 = 0}$

$2tg\,x - \frac{3}{tg\,x} - 1 = 0 \quad 2tg^2\,x - tg\,x - 3 = 0 \quad tg\,x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} \quad tg\,x = \frac{3}{2} \quad x = 56°18'35'' + 180°k$

$tg\,x = -1 \quad x = 135° + 180°k$

$\boxed{\cos 2x = 1 + 4sen\,x}$

$\cos^2 x - sen^2\,x = 1 + 4sen\,x \quad 1 - sen^2\,x - sen^2\,x = 1 + 4sen\,x \quad 2sen^2\,x + 4sen\,x = 0$

$2sen\,x\,(sen\,x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} sen\,x = 0 \\ sen\,x + 2 = 0 \end{cases} \quad x = \arcsen 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360°k \\ x_2 = 180° + 360°k \end{cases} \quad x = 0° + 180°k$

$\boxed{3sen^2\,x - 5sen\,x + 2 = 0}$

$sen\,x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6} \quad sen\ x = 1 \quad x = 90° + 360°k$

$sen\ x = \frac{2}{3} \quad x = \begin{cases} 41°48'37'' + 360°k \\ 138°11'23'' + 360°k \end{cases}$

## Ampliación ejercicios ecuaciones trigonométricas:

**1** Calcular todas las soluciones a las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\sin(2x) = 1$ b) $\sin(x/2) = \sqrt{2}/2$ c) $\sin(x + 30°) = -1$

d) $\cos(x - 45°) = -1$ e) $\cos(3x) = 1/2$ f) $\cos(2x + 60°) = 1$

g) $\tan(6x - 60°) = -1$ h) $\tan(5x) = 1$ i) $\tan(3x + 45°) = \sqrt{3}$

**Sol:** a) $x = 45° + 180°k$; b) $x = 90° + 720°k$, $x = 270° + 720°k$; c) $x = 240° + 360°k$;
d) $x = 225° + 360°k$; e) $x = 20° + 120°k$, $x = -20° + 120°k$; f) $x = -30° + 180°k$;
g) $x = 2.5° + 30°k$; h) $x = 9° + 36°k$; i) $x = 5° + 60°k$.

**2** Calcular todas las soluciones a las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\sin^2(2x) = 3/4$ b) $\sin^2(3x) = 1/4$ c) $\sin^2(x + 45°) = 1$

d) $\cos^2(2x) = 3/4$ e) $\cos^2(3x) = 1/4$ f) $\cos^2(x + 45°) = 1$

g) $\tan^2(x) = 1$ h) $\tan^2(x - 45°) = 0$ i) $\tan^2(3x - 60°) = 3$

**Sol:** a) $x = 30° + 180°k$, $x = 60° + 180°k$, $x = 120° + 180°k$, $x = 150° + 180°k$;
b) $x = 10° + 120°k$, $x = 50° + 120°k$, $x = 70° + 120°k$, $x = 110° + 120°k$;
c) $x = 45° + 180°k$;
d) $x = 15° + 180°k$, $x = 75° + 180°k$, $x = 105° + 180°k$, $x = 115° + 180°k$;
e) $x = 20° + 120°k$, $x = 40° + 120°k$, $x = 80° + 120°k$, $x = 100° + 120°k$;
f) $x = -45° + 180°k$; g) $x = 45° + 90°k$; h) $x = 45° + 180°k$; i) $x = 40° + 60°k$, $x = 60°k$.

**3** Calcular todas las soluciones a las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\sin^2 x - \cos^2 x = 1/2$ b) $\cos^2 x = \sin^2 x$ c) $\sin^2 x + \cos^2 x = 2 - \cos^2 x$

d) $5\cos^2 x + \sin^2 x = 4\cos x$ e) $\sin^2 x + \cos(2x) = 1/4$ f) $\tan^2 x + 2 = 3\tan x$

g) $2\sin^2 x = \tan x$ h) $\cos(2x) + 5\cos x + 3 = 0$ i)

**Sol:** a) $x = 60 + 180k$, $x = -60 + 180k$; b) $x = 45 + 180k$, $x = 135 + 180k$; c) $x = 180k$;
d) $x = 60 + 360k$, $x = -60 + 360k$; e) $x = 60 + 180k$, $x = 120 + 180k$;
f) $x = 45 + 180k$; g) $x = 45 + 180k$, $x = 180k$; h) $x = -30 + 360k$; $x = -150 + 360k$.

**1.** $sen2x = \cos 60^o$

**2.** $tg2x = -tgx$

**3.** $sen^2x - \cos^2 x = 1/2$

**4.** $senx = sen(45^o - x)$

**5.** $sen(x+45^o) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

**6.** $senx + \sqrt{3}\cos x = 2$

**7.** $tgx \cdot \sec x = \sqrt{2}$

**8.** $\dfrac{sen^2 x}{2} = \dfrac{tgx}{4}$

**9.** $4tgx = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}$

**10.** $tg(x-45^o) + tg(x+45^o) = 2ctgx$

**11.** $\cos x \cdot \cos 2x + 2\cos^2 x = 0$

**12.** $\cos 2x + senx = 4sen^2 x$

**13.** $2tgx - 3ctgx - 1 = 0$

**14.** $sen2x \cdot \cos x = 6sen^3 x$

**15.** $\cos x = \dfrac{2tgx}{1+tg^2 x}$

**16.** $3\cos x = 2\sec x - 5$

**17.** $\dfrac{sen(x+30^o)}{\cos(x+60^o)} = 1$

**18.** $4sen\dfrac{x}{2} + 2\cos x = 3$

**19.** $4sen(x-30^o)\cos(x-30^o) = \sqrt{3}$

**20.** $tg\dfrac{x}{2} = \dfrac{tgx-2}{tgx+2}$

**21.** $3sen^2 x - 5senx + 2 = 0$

**22.** $\cos 2x = 5 - 6\cos^2 x$

**23.** $\cos 2x + 5\cos x + 3 = 0$

**24.** $\dfrac{\cos x}{tgx} = \dfrac{3}{2}$

**25.** $sen6x + sen2x = 2sen4x$

**26.** $\cos 2x + \cos x = senx + sen2x$

**27.** $\cos 2x - \cos 6x = sen5x + sen3x$

**28.** $\cos 8x + \cos 6x = 2\cos 210^o \cdot \cos x$

**29.** $4sen(x-30^o) \cdot \cos(x-30^o) = \sqrt{3}$

**30.** $\cos 4x + \cos 2x = sen4x - sen2x$

## Soluciones

**1)** $x_1 = \frac{\pi}{12} + k\pi; x_2 = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ **2)** $x_1 = k\pi; x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi$

$x_3 = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ **3)** $x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi; x_2 = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ **4)** $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$

**5)** $x_1 = \frac{\pi}{12} + 2k\pi; x_2 = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$ **6)** $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

**7)** $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi; x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ **8)** $x_1 = k\pi; x_2 = \frac{\pi}{4} + k\pi$

**9)** $x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi; x_2 = \frac{\pi}{6} + k\pi$ **10)** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x_2 = \frac{\pi}{6} + k\pi$

$x_3 = \frac{5\pi}{6} + k\pi$ **11)** $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi; x_2 = 68°31'45{,}47'' + 360k$

$x_3 = 291°29'45{,}47'' + 360k$ **12)** $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi;$

$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \begin{cases} x_3 = 340°31'43{,}61'' + 360k \\ x_4 = 199°28'14{,}53'' + 360k \end{cases}$

**13)** $x_1 = \frac{3\pi}{4} + k\pi; x_2 = 56°18'35{,}76'' + 180k$ **14)** $x_1 = k\pi$

$x_2 = \frac{\pi}{6} + k\pi; x_3 = \frac{5\pi}{6} + k\pi$ **15)** $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

**16)** $\begin{cases} x_1 = 70°31'43{,}61'' + 360k \\ x_2 = 289°28'16{,}39'' + 360k \end{cases}$ **17)** $x = k\pi$

**18)** $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ **19)** $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$ **20)** *No sol*

**21)** $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \begin{cases} x_2 = 41°48'37{,}13'' + 360k \\ x_3 = 138°11'22{,}87'' + 360k \end{cases}$

**22)** $x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi; x_2 = \frac{5\pi}{6} + k\pi$ **23)** $x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi;$

$x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ **24)** $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ **25)** $x = \frac{k\pi}{4}$ **26)** $x_1 = (2k-1)\frac{\pi}{4}$

$x_2 = \pi + 2k\pi$ **27)** $x_1 = \frac{k\pi}{4}; x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi;$

**28)** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ **29)** $x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi; x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$

**30)** $x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}; x_2 = (2k-1)\frac{\pi}{4}$