Ecuaciones trigonométricas

1) Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas

a) $2tgx - 3\ cotgx - 1 = 0$
b) $\cos^2x - 3sen^2x = 0$
c) $sen(2x + 60) + sen(x + 30) = 0$
d) $sen^2x - \cos^2x = 1/2$
e) $sen2x \cdot \cos x = 6sen^3x$

Indicaciones:

Debes intentar reducir toda la expresión a una única razón trigonométrica (que todo sean senos, o cosenos, por ejemplo). Cuando puedas llegar a una expresión del tipo *seno(algo) = un número,* sólo tendrás que usar la función arco correspondiente (arcoseno, arcotangente, etc.).

Para conseguir que todas las razones trigonométricas sean iguales no hay una regla fija; tendrás que probar Btrasteando con las siguientes fórmulas básicas:

$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$1 + tg^2\alpha = sec^2\alpha$

$tg\alpha = sen\alpha / \cos\alpha$

$1 + cotg^2\alpha = cosec^2\alpha$

<u>Ángulo suma</u>

$sen (\alpha \pm B) = sen\alpha \cdot \cos B \pm \cos\alpha \cdot senB$

$\cos (\alpha \pm B) = \cos\alpha \cdot \cos B \pm sen\alpha \cdot senB$

$tg (\alpha + B) = (tg\alpha + tgB) / (1 - tg\alpha \cdot tgB)$

$tg (\alpha - B) = (tg\alpha - tgB) / (1 + tg\alpha \cdot tgB)$

<u>Ángulo doble</u>

$sen2\alpha = 2sen\alpha \cdot \cos\alpha$

$\cos2\alpha = \cos2\alpha - sen2\alpha$

$tg2\alpha = (2tg\alpha) / (1 - tg2\alpha)$

<u>Ángulo mitad</u>

$sen\alpha/2 = \pm \sqrt{((1 - \cos\alpha)/2)}$

$\cos\alpha/2 = \pm \sqrt{((1 + \cos\alpha)/2)}$

$tg\alpha/2 = \pm \sqrt{((1-\cos\alpha)/(1+\cos\alpha))}$

<u>Transformar sumas en productos</u>

$sen\alpha + senB = 2sen((\alpha+B)/2) \cdot \cos((\alpha-B)/2)$

$sen\alpha - senB = 2\cos((\alpha+B)/2) \cdot sen((\alpha-B)/2)$

$\cos\alpha + \cos B = 2\cos((\alpha+B)/2) \cdot \cos((\alpha-B)/2)$

$\cos\alpha - \cos B = -2sen((\alpha+B)/2) \cdot sen((\alpha-B)/2)$

Soluciones

a) $2tgx - 3\ cotgx - 1 = 0$

Transformamos la cotg en tg. Llegamos a una ecuación de segundo grado.

$2tgx - 3/tgx - 1 = 0 \rightarrow 2tg^2x - 3 - tgx = 0$

Resolvemos con la fórmula de la ecuación de segundo grado, siendo la incógnita tgx. Obtenemos dos soluciones:

Solución 1: $tgx = 3/2 \rightarrow x = 56{,}31º + 180k$ Solución 2: $tg\ x = -1 \rightarrow x = 135º + 180k$

b) $\cos^2x - 3sen^2x = 0$

$1 - sen^2x - 3sen^2x = 0 \rightarrow 1 - 4sen^2x = 0 \rightarrow sen^2x = 1/4 \rightarrow senx = \pm 1/2$

$x = arcsen1/2 \rightarrow x_1 = 30º + 360k\ x_2 = 150º + 360k$

$x = arcsen(-1/2) \rightarrow x_3 = 210º + 360k\ x_4 = 330º + 360k$

c) sen(2x + 60) + sen(x + 30) = 0

Convertimos la suma del seno de dos ángulos en un producto (revisa las fórmulas básicas):
2sen (((2x+60)+(x+30))/2)·cos (((2x+60) – (x + 30))/2) = 0
2sen (3x/2 + 45)·cos (x/2 + 15) = 0 sen (3x/2 + 45)·cos (x/2 + 15) = 0 sen (3x/2 + 45) = 0
→ x_1 = -30º + 120k cos (x/2 + 15) = 0 → x_2 = 150º + 360k x_3 = 510º + 360k

d) sen²x -cos²x = 1/2

Cambiamos el signo a los dos lados de la ecuación, para que lo de la izquierda se convierta en el coseno del ángulo doble:
$sen^2x - cos^2x = 1/2$
$cos^2x – sen^2x = -1/2$
cos2x = -1/2
$2x_1$ = 120º + 360k → x_1 = 60º + 180k
$2x_2$ = 240 + 360k → x_2 = 120 + 180k

e) sen2x·cosx = 6sen³x

Transformamos el seno del ángulo doble, y pasamos el 2 dividiendo al lado derecho.
$2senx·cosx·cosx = 6sen^3x$

$senx·cosx·cosx = 3sen^3x$

$senx·cos^2x – 3sen^3x = 0$

Sacamos factor común

$senx(cos^2x – 3sen^2x) = 0$

Como es un producto de dos cosas que dan cero, o bien la primera es cero o bien lo es la segunda. Así, por un lado, senx = 0 → x_1 = 0º + 180k Por otro,

$cos^2x – 3sen^2x = 0$ $1 – sen^2x – 3sen^2x = 0$ $1 – 4sen^2x = 0$ $sen^2x = 1/4$ senx = $\pm$1/2

x = arcsen1/2 → x_2 = 30º+ 360k
x_3 = 120º + 360k
x = arcsen(-1/2) → x_4= 210º+ 360k
x_5 = 330º + 360k

f) 2cosx = 3tgx

2cosx = 3senx/cosx
$2cos^2x = 3senx$
$2(1-sen^2x) = 3 senx$
$2 – 2sen^2x – 3senx = 0$

Resolvemos como una ecuación de segundo grado en la que la incógnita es senx. Obtenemos dos soluciones: Solución 1: senx = 1/2 → x1 = 30º + 360k x2 = 150º + 360k
Solución 2: senx = -2 → se descarta, porque ningún seno o coseno puede valer más de 1 o -1.

$\boxed{\cos^2 x - 3sen^2 x = 0}$

$1 - sen^2 x - 3sen^2 x = 0 \qquad 1 - 4sen^2 x = 0 \qquad sen^2 x = \frac{1}{4} \qquad sen\,x = \pm\frac{1}{2} \qquad x = arcsen\,\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 30° + 360°k \\ x_2 = 150° + 360°k \end{cases}$

$\boxed{2tg\,x - 3cotg\;x - 1 = 0}$

$2tg\,x - \frac{3}{tg\,x} - 1 = 0 \qquad 2tg^2\,x - tg\,x - 3 = 0 \qquad tg\,x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} \qquad tg\,x = \frac{3}{2} \quad x = 56°18'35'' + 180°k$

$tg\,x = -1 \quad x = 135° + 180°k$

$\boxed{\cos 2x = 1 + 4sen\,x}$

$\cos^2 x - sen^2\,x = 1 + 4sen\,x \qquad 1 - sen^2\,x - sen^2\,x = 1 + 4sen\,x \qquad 2sen^2\,x + 4sen\,x = 0$

$2sen\,x\,(sen\,x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} sen\,x = 0 \\ sen\,x + 2 = 0 \end{cases} \qquad x = arcsen\,0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360°k \\ x_2 = 180° + 360°k \end{cases} \qquad x = 0° + 180°k$

$\boxed{3sen^2\,x - 5sen\,x + 2 = 0}$

$sen\,x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6} \qquad sen\;x = 1 \quad x = 90° + 360°k$

$sen\;x = \frac{2}{3} \quad x = \begin{cases} 41°48'37'' + 360°k \\ 138°11'23'' + 360°k \end{cases}$

Ampliación ejercicios ecuaciones trigonométricas:

1 Calcular todas las soluciones a las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\sin(2x) = 1$ b) $\sin(x/2) = \sqrt{2}/2$ c) $\sin(x + 30°) = -1$

d) $\cos(x - 45°) = -1$ e) $\cos(3x) = 1/2$ f) $\cos(2x + 60°) = 1$

g) $\tan(6x - 60°) = -1$ h) $\tan(5x) = 1$ i) $\tan(3x + 45°) = \sqrt{3}$

Sol: a) $x = 45° + 180°k$; b) $x = 90° + 720°k$, $x = 270° + 720°k$; c) $x = 240° + 360°k$;
d) $x = 225° + 360°k$; e) $x = 20° + 120°k$, $x = -20° + 120°k$; f) $x = -30° + 180°k$;
g) $x = 2.5° + 30°k$; h) $x = 9° + 36°k$; i) $x = 5° + 60°k$.

2 Calcular todas las soluciones a las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\sin^2(2x) = 3/4$ b) $\sin^2(3x) = 1/4$ c) $\sin^2(x + 45°) = 1$

d) $\cos^2(2x) = 3/4$ e) $\cos^2(3x) = 1/4$ f) $\cos^2(x + 45°) = 1$

g) $\tan^2(x) = 1$ h) $\tan^2(x - 45°) = 0$ i) $\tan^2(3x - 60°) = 3$

Sol: a) $x = 30° + 180°k$, $x = 60° + 180°k$, $x = 120° + 180°k$, $x = 150° + 180°k$;
b) $x = 10° + 120°k$, $x = 50° + 120°k$, $x = 70° + 120°k$, $x = 110° + 120°k$;
c) $x = 45° + 180°k$;
d) $x = 15° + 180°k$, $x = 75° + 180°k$, $x = 105° + 180°k$, $x = 115° + 180°k$;
e) $x = 20° + 120°k$, $x = 40° + 120°k$, $x = 80° + 120°k$, $x = 100° + 120°k$;
f) $x = -45° + 180°k$; g) $x = 45° + 90°k$; h) $x = 45° + 180°k$; i) $x = 40° + 60°k$, $x = 60°k$.

3 Calcular todas las soluciones a las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\sin^2 x - \cos^2 x = 1/2$ b) $\cos^2 x = \sin^2 x$ c) $\sin^2 x + \cos^2 x = 2 - \cos^2 x$

d) $5\cos^2 x + \sin^2 x = 4\cos x$ e) $\sin^2 x + \cos(2x) = 1/4$ f) $\tan^2 x + 2 = 3\tan x$

g) $2\sin^2 x = \tan x$ h) $\cos(2x) + 5\cos x + 3 = 0$ i)

Sol: a) $x = 60 + 180k$, $x = -60 + 180k$; b) $x = 45 + 180k$, $x = 135 + 180k$; c) $x = 180k$;
d) $x = 60 + 360k$, $x = -60 + 360k$; e) $x = 60 + 180k$, $x = 120 + 180k$;
f) $x = 45 + 180k$; g) $x = 45 + 180k$, $x = 180k$; h) $x = -30 + 360k$; $x = -150 + 360k$.