

Límites - Ofimega acadèmies - Resumen y ejercicios

Tipos: a) Límites cuando $x \rightarrow \infty$ b) Límites cuando $x \rightarrow n^0$ c) Límites laterales

Ojo: con las indeterminaciones: ∞/∞ ; $\infty-\infty$; $0/0$; 1^∞ ; $0 \cdot \infty$

a) Límites cuando $x \rightarrow \infty$

➤ Solución directa: Nos quedamos con el término de mayor grado

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 + 3x + 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 + 3x + 5 = \lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} -(\infty)^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} -(\infty) = -\infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} x - 3x^4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x - 3x^4 = \lim_{x \rightarrow \infty} -3x^4 = \lim_{x \rightarrow \infty} -3(\infty)^4 = \lim_{x \rightarrow \infty} -3 \cdot \infty = -\infty$$

➤ Si es indeterminación del tipo: $\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{P(x)}{Q(x)} \Rightarrow \frac{a \cdot x^n + b \cdot x + \dots}{b \cdot x^d + c \cdot x + \dots} \Rightarrow \begin{cases} \text{Si grad del numerad} > \text{grad del denom.} \Rightarrow \infty \\ \text{Si grad del numerad} < \text{grad del denom.} \Rightarrow 0 \\ \text{Si grad del numerad} = \text{grad del denom.} \Rightarrow a/b \end{cases}$

Ejemplo caso 1: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 5}{x - 4} \Rightarrow \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x = +\infty$

Ejemplo caso 2: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 4x + 3} \Rightarrow \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$

Ejemplo caso 3: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 5}{4x^2 - 4} \Rightarrow \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 5}{4x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{4x^2} = \frac{3}{4}$

➤ Si es indeterminación del tipo: $\infty - \infty$

Si hay una raíz - algo: Multiplicar y dividir por el conjugado. Utilizando la fórmula: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1} - x \Rightarrow \infty - \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1} - x}{\frac{1}{\sqrt{x+1} + x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+1} - x)(\sqrt{x+1} + x)}{\sqrt{x+1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1 - x^2}{\sqrt{x+1} + x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} -x = -\infty$$

Si es del tipo fracción - fracción: Restar las fracciones y volver a hacer el límite.

Si es del tipo $0 \cdot \infty$ Hacer la inversa del factor que da 0 para convertirla en el tipo ∞/∞

➤ Si es indeterminación del tipo: $1^\infty \Rightarrow$ Cambiamos por: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) [f(x) - 1]}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{3x-5}{3x-2} \right]^{2x^2} \Rightarrow \left[\frac{\infty}{\infty} \right]^\infty \Rightarrow 1^\infty \text{ Indet.} \Rightarrow e^{\lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 \left[\frac{3x-5}{3x-2} - 1 \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 \left[\frac{3x-5-3x+2}{3x-2} \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{-6x^2}{3x-2} \right]} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

b) Límites cuando $x \rightarrow n^0$

➤ Solución directa: Sustituimos directamente, ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 2^2 = 4$

➤ Si es indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ $\Rightarrow \begin{cases} \text{Método a) Descomponer en factores y simplificar} \\ \text{Método b) Aplicar regla L'Hôpital derivando Num y Den} \end{cases}$

Si es racional: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 6x + 12}{x^2 + 3x - 10} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 - 6)}{(x-2)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6}{x+5} = \frac{-2}{7}$

Si es irracional: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 2x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2 + 5} - 3)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}{(x^2 - 2x)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)}{x(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

c) Límites laterales

➤ **Caso $k/0$** = Para ver la tendencia de las asíntotas verticales. $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3-x}{x+2} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3-x}{x+2} = +\infty$

➤ **Caso funciones a trozos**: Comprobar si son iguales los límites laterales en los puntos de unión para verificar su continuidad.

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & x < -1 \\ x^2+1 & -1 \leq x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+3) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2+1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Luego } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$$

Full d'exercicis

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} 5x^3 + 7x$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x^2}$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 5}{-x^2 - 4}$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2}{\sqrt{x} - 3}$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{4x^2 - 4}$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^5 + 2x - 6}}{x^3 - 4x + 2}$

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3x} - x$

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 - x^2 + 1}{2x^7 + x^3 + 300}$

11. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x}{x-3}$

12. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

13. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

14. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$

15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8} :$

16. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8}$

17. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} - 1}{x-1}$

18. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 - 2x + 3})$

19. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}$

20. $\lim_{x \rightarrow 81} \frac{x - 81}{\sqrt{x} - 9}$

21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^{100}}{(2x+50)^{100}}$

22. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} =$

23. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

24. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{2 - \sqrt{x^2 + 3}}$

25. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{(x-1)^3}$

26. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+2}{x-1} - \frac{x-3}{x^2 - 3x + 2} \right)$

27 Límites laterales en 0 y en 1

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2+1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 2x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

28 Hallar a y b para que sea continua

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - b & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ x^2 + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solucions pag 1

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} 5x^3 + 7x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} 5x^3 + 7x = \lim_{x \rightarrow \infty} 5x^3 = \lim_{x \rightarrow \infty} 5 \cdot \infty = \infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\infty} = 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 5}{-x^2 - 4} \Rightarrow \dots \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 5}{-x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{-1} = -\infty$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2}{\sqrt{x} - 3} \Rightarrow \dots \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2}{\sqrt{x} - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 \text{ grado } 3}{\sqrt{x} \text{ grado } 1/2} = \infty$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{4x^2 - 4} \Rightarrow \dots \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{4x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x+3}{x-2}} \Rightarrow \dots \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x+3}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x}{x}} = 1$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^5 + 2x - 6}}{x^3 - 4x + 2} \Rightarrow \dots \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^5 + 2x - 6}}{x^3 - 4x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^5} \text{ grado } 5/2}{x^3 \text{ grado } 3} = 0$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3x} - x \Rightarrow \dots \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3x} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} - x)(\sqrt{x^2 + 3x} + x)}{(\sqrt{x^2 + 3x} + x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x-2} \Rightarrow \dots \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{x-2})^2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2 - x+2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} = \frac{4}{\infty} = 0$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^7 - x^2 + 1}{x^7}}{\frac{2x^7 + x^3 + 300}{x^7}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^7}}{2 + \frac{1}{x^4} + \frac{300}{x^7}} = \frac{1+0+0}{2+0+0} = \frac{1}{2}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x}{x-3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x}{x-3} = \frac{10}{-1} = -10$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x+1 = 2$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x-1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

Soluciones pag 2

14 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$ R: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} = \frac{1^3 + 1}{1^2 + 1} = \frac{2}{2} = 1$

15 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8} = \frac{-16}{-8} = 2$

16 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8}$

Método factorización:

$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + x^{n-4}y^3 + \dots + y^{n-1}x + y^{n-1})$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} =$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3 + 2x^2 + 4x + 8)}{(x^2 + 2x + 4)} = \frac{(2^3 + 2(2^2) + 4(2) + 8)}{(2^2 + 2(2) + 4)} = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$

Método L'Hôpital:

$\frac{d}{dx}(x^4 - 16) = 4x^3$
 $\frac{d}{dx}(x^3 - 8) = 3x^2$ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^3}{3x^2} = \frac{4(8)}{3(4)} = \frac{8}{3}$

17

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x - 1} - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2x - 1} - 1)(\sqrt{2x - 1} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{2x - 1} + 1)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{2x - 1} + 1)} = \frac{2}{\sqrt{1} + 1} = 1$

18 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 - 2x + 3}) = \infty - \infty$

$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 - 2x + 3}) \left(\frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \sqrt{x^2 - 2x + 3}}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \sqrt{x^2 - 2x + 3}} \right) =$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 3 - x^2 + 2x - 3}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \sqrt{x^2 - 2x + 3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2})} + \sqrt{x^2(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2})}} =$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + x\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}} = \frac{4}{2} = 2$

19

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + 1)(x + 2)}{(x + 3)(x + 4)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + 1)(x + 2)}{(x + 3)(x + 4)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 7x + 12}$

20 $\lim_{x \rightarrow 81} \frac{x - 81}{\sqrt{x} - 9}$

Método 1: como $x - 81 = (\sqrt{x} - 9)(\sqrt{x} + 9)$

$\lim_{x \rightarrow 81} \frac{x - 81}{\sqrt{x} - 9} = \lim_{x \rightarrow 81} \frac{(\sqrt{x} - 9)(\sqrt{x} + 9)}{\sqrt{x} - 9} = \lim_{x \rightarrow 81} (\sqrt{x} + 9) = (\sqrt{81} + 9) = 9 + 9 = 18$

Método 2: L'Hôpital $\frac{d}{dx}(x - 81) = 1$
 $\frac{d}{dx}(\sqrt{x} - 9) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\lim_{x \rightarrow 81} \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2\sqrt{x} = 18$

$\lim_{x \rightarrow 81} \frac{x - 81}{\sqrt{x} - 9} = \lim_{x \rightarrow 81} 2\sqrt{x} = 2\sqrt{81} = 2(9) = 18$

21

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + 1)^{100}}{(2x + 50)^{100}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{x + 1}{x}\right)^{100}}{\left(\frac{2x + 50}{x}\right)^{100}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{100}}{\left(2 + \frac{50}{x}\right)^{100}} = \frac{1^{100}}{2^{100}}$

22

$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos \pi/2}{1 + \sin \pi/2} = \frac{0}{2} = 0$

23

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$

24

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{2 - \sqrt{x^2 + 3}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - x^2)(2 + \sqrt{x^2 + 3})}{(2 - \sqrt{x^2 + 3})(2 + \sqrt{x^2 + 3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 + \sqrt{x^2 + 3}}{4 - (x^2 + 3)} = 4$

25

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{(x - 1)^3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 - 4)}{(x - 1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 4)}{(x - 1)^2} = -\infty$

26 $\infty - \infty$

$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x + 2}{x - 1} - \frac{x - 3}{x^2 - 3x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - 1}{(x - 1)(x - 2)} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x - 1}{(x - 1)(x - 2)} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x - 1}{(x - 1)(x - 2)} = +\infty \end{cases} \Rightarrow$
 \Rightarrow no existe el límite

27

$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1 \end{cases} \Rightarrow$ es continua en $x = 0$.
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 1) = 3 \end{cases} \Rightarrow$ discontinuidad de salto

28

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - b) = -b = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b) = b \end{cases} \quad -b = b \Rightarrow b = 0.$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax + b) = 2a + b = f(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + b) = 4 + b \end{cases} \quad 2a + b = 4 + b \Rightarrow a = 2$

Ejercicios solucionados

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x-1}{\sqrt[3]{5x^3+4x-2}} = \frac{\infty}{\infty} \quad \rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7x}{x} - \frac{1}{x}}{\sqrt[3]{\frac{5x^3}{x^3} + \frac{4x}{x^3} - \frac{2}{x^3}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 - \frac{1}{x}}{\sqrt[3]{5 + \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^3}}} = \frac{7}{\sqrt[3]{5}}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^4+x^2+1}}{x^2+1} = \frac{\infty}{\infty} \quad \rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^4+x^2+1}}{x^2+1} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^4+x^2+1}}{x^2+1} = \frac{\sqrt{4}}{1} = 2$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2+1)^2-3x^2+3}{x^3-5} = \frac{\infty}{\infty} \quad \rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2+1)^2-3x^2+3}{x^3-5} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2+1)^2-3x^2+3}{x^3-5} = \infty$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x^8-5)}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} \quad \rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x^8-5)}{x^2} = 0$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{18x^2+1} \frac{1}{\sqrt{32x^2-3}} \right) \quad \rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{18x^2+1} \frac{1}{\sqrt{32x^2-3}} \right) = \infty \cdot 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{18x^2+1}{32x^2-3}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18x^2+1}{32x^2-3}} = \sqrt{\frac{18}{32}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2-1}{x} = \frac{0}{0} \quad \rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+2) = 2$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-5x+6} = \frac{0}{0} \quad \rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)}{(x-2)} = 6$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \frac{0}{0} \quad \rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{4}$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+x}) = \infty - \infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+x})(\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+x})}{(\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3x-x^2-x}{(\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{(\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+x})} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{2}{2} = 1$$

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2+1}{x-2} \right) \quad \rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2+1}{x-2} \right) = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-2x^2-x^3-x+x^2+1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2-x+1}{x^2-3x+2} = -1$$

Ejercicios con soluciones

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^4}{x^6 - x^2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}{x^2 + x}$

g) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x+2} - 2}$

h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 1}$

i) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{2 - \sqrt{8-x}}$

j) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x+2} - 2}$

2. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^3 - 1} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{2+2x-x^2}{x^2-2x} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x^2 - 4} \right)^{\frac{1}{x+2}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3-x}{2+x} \right)^x$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{x}}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + x + 1}{2+x} \right)^{\frac{1}{x-1}}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x+x^2)^{\frac{1}{x}}$

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+5)(5x+2)}{-(x-3)^2}$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 - \frac{x^4 + 1}{x^2 - 1} \right)$

j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+9} - 3}{\sqrt{x^2+4} - 2}$

k) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{x^2 - x})$

l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \right)^{\frac{2x+3}{x-2}}$

m) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2} \right)^{\frac{x^2+1}{x}}$

Soluciones

1) a) 3/4 b) 5/3 c) 4 d) -1/2 e) -1 f) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ g) 4 h) 0 i) -2/3 j) 2

2) a) $+\infty$ b) 3/2 c) $+\infty$ d) 1 e) e^6 f) e g) e h) -15 i) -1 j) 1 k) -1 l) 1 m) e^{-1}

Ejercicios de límites por L'Hôpital:

1º) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2 + x}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2 + x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x + 1} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = +\infty \quad 1º)$$

2º) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-1/2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

3º) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x \cdot \operatorname{sen}(x)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(x) - 1}{\operatorname{sen}(x) + x \cdot \cos(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\operatorname{sen}(x)}{2 \cdot \cos(x) - x \cdot \operatorname{sen}(x)} \right) = 0$$

Límites con exponencial.**Indeterminación del tipo 1^∞ con el número e.**Método 1:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$$

- Se debe parecer a:
- Si la base no empieza con 1 se le suma y resta 1. Si el segundo término de la base no tiene 1 como numerador se pasa al denominador su inverso. Si no coincide con el exponente se multiplica por su inverso.

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} = 1^\infty \Rightarrow \text{Sumamos y restamos 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{2x+1}{x+2} - 1\right)^{\frac{1}{x-1}} \text{ común denominador} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$$

$$\text{inverso} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\right)^{\frac{1}{x-1}} \text{ Elevamos al denominador} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\right)^{\frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{1}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+2}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$$

Método 2:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{h(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} h(x) \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right)}$$

- Cambiar por:

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} = 1^\infty \Rightarrow e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1}\right) \left(\frac{2x+1}{x+2} - 1\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x+2}\right)} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$$

Ejercicios de límites exponenciales:

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{3n+1}\right)^{\frac{3n^2+2}{5n-3}}$$

$$\text{Sol:} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{3x+1}\right)^{\frac{3x^2+2}{5x-3}} = \infty^\infty = \infty$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{3n+1}\right)^{\frac{-3n^2+2}{5n-3}}$$

$$\text{Sol:} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{3x+1}\right)^{\frac{-3x^2+2}{5x-3}} = \infty^{-\infty} = \frac{1}{\infty^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{3n+1}\right)^{\frac{-3n^2+2}{5n^2-3}}$$

$$\text{Sol:} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{3x+1}\right)^{\frac{-3x^2+2}{5x^2-3}} = \infty^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\infty^3}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{3n^3+1}\right)^{\frac{3n^2+2}{5n-3}}$$

$$\text{Sol:} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{3x^3+1}\right)^{\frac{3x^2+2}{5x-3}} = 0^\infty = 0$$

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{3n^3+1}\right)^{\frac{-3n^2+2}{5n-3}}$$

$$\text{Sol:} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{3x^3+1}\right)^{\frac{-3x^2+2}{5x-3}} = 0^{-\infty} = \frac{1}{0^\infty} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$6 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{3n^2+1}\right)^{\frac{-3n+2}{5n^2-3}}$$

$$\text{Sol:} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{3x^2+1}\right)^{\frac{-3x+2}{5x^2-3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$$

$$7 \quad \lim_{x \rightarrow 0} [1+3x]^{2/x}$$

$$\text{Sol:} \quad \lim_{x \rightarrow 0} [1+3x]^{2/x} \Rightarrow 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} [(1+3x)-1]} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 3x}{x}} = e^6$$