

# Logaritmos

Definición:

Si:

$$\log_a b = x \iff a^x = b$$

Importante aprender  
(abre el grifo desde la base)

El logaritmo se convierte en una función exponencial.

- Ejemplo de multiplicación en forma exponencial:  $a^{b_1} \cdot a^{b_2} = a^{b_1+b_2}$
- Ejemplo de multiplicación en forma logarítmica:  $\text{Log } b_1 \cdot b_2 = \text{log } b_1 + \text{log } b_2$

Por lo tanto, el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores. De igual manera se demostraría que el logaritmo de un cociente es la resta de los logaritmos, etc... Así con los logaritmos las multiplicaciones se convierten en sumas, las divisiones en restas y la exponenciación en multiplicaciones. Esto facilita mucho las operaciones de grandes cantidades.

Nota:  $\log x \rightarrow$  es lo mismo que  $\log_{10} x \rightarrow$  Llamado logaritmo *decimal* (en base 10)  
 $\ln x \rightarrow$  es lo mismo que  $\log_e x \rightarrow$  Llamado logaritmo *neperiano* (en base e)

## Ejercicios con la definición de logaritmo:

Ejem.:  $\log_2 8 = 3 \rightarrow$  pues  $2^3 = 8$  -  $\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$  pues  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 2^4 = 16$ .

**Hallar la x:** *Ejercicios resueltos con la definición (no hay sumas ni restas).*

a)  $\log_2 32 = x \rightarrow 2^x = 32 \rightarrow 2^x = 2^5 \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{5}{2} \rightarrow x = 5$

b)  $\log_2 x = 3 \rightarrow 2^3 = x \rightarrow x = 8$

c)  $\log_x 100 = 2 \rightarrow x^2 = 100 \rightarrow x = \sqrt{100} \rightarrow x = 10$

d)  $\log_6 \frac{1}{36} = x \rightarrow 6^x = \frac{1}{6^2} \rightarrow 6^x = 6^{-2} \rightarrow x = -2$

e)  $\log_3 \sqrt[4]{27} = x \rightarrow 3^x = 27^{\frac{1}{4}} \rightarrow 3^x = 3^{\frac{3}{4}} \rightarrow x = \frac{3}{4}$

## Propiedades de los logaritmos

logaritmo del producto: $\log_a b \cdot c = \log_a b + \log_a c$	logaritmo de la potencia: $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$
logaritmo del cociente: $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$	logaritmo de la raíz: $\log_a \sqrt[m]{b} = \frac{1}{m} \log_a b$
especiales: $\log_a 1 = 0$ ; $\log_a a = 1$ ; $\log 0 = \cancel{\neq}$	cambio de base: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

Las propiedades permiten, a través de los logaritmos, convertir productos y cocientes en sumas y restas.

**Método para resolver ejercicios de propiedades:****a) Desarrollar expresiones:**

Desarrollar la siguiente expresión en forma de sumas y restas de logaritmos:

$$\log_a \frac{\sqrt{3x-1}(x^2+3)}{(x-2)(2x+1)}$$

Solución: Utilizamos las propiedades anteriores de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \log_a \frac{\sqrt{3x-1}(x^2+3)}{(x-2)(2x+1)} &= && \rightarrow \text{Pasamos el logaritmo del cociente a resta de logaritmos:} \\ &= \log_a \sqrt{3x-1}(x^2+3) - \log_a (x-2)(2x+1) && \rightarrow \text{Pasamos el logaritmo del producto a suma de logaritmos:} \\ &= \log_a \sqrt{3x-1} + \log_a (x^2+3) - [\log_a (x-2) + \log_a (2x+1)] && \rightarrow \text{logaritmo de la raíz} \\ &= \frac{1}{2} \log_a (3x-1) + \log_a (x^2+3) - \log_a (x-2) - \log_a (2x+1) \end{aligned}$$

**b) Ecuaciones logarítmicas:**

$$\log x = 1 + \log (x-3)$$

\_\_\_\_\_ *método* \_\_\_\_\_

$$\log x = \log 10 + \log (x-3)$$

→ Intentamos tener logs en todos los términos

$$\log x = \log [10 \cdot (x-3)]$$

→ Agrupamos logs a cada lado con las propiedades

$$\cancel{\log} x = \cancel{\log} [10 \cdot (x-3)]$$

→ tachamos logs de cada lado y cogemos el interior

$$x = 10(x-3)$$

→ Quitamos los paréntesis

$$x = 10x - 30$$

→ Resolvemos la ecuación

$$x = 30/9 = 10/3$$

$$\log 2 + \log (11-x^2) = 2 \log (5-x)$$

\_\_\_\_\_ *método* \_\_\_\_\_

$$\log 2 + \log (11-x^2) = \log (5-x)^2$$

→ Agrupamos logs a cada lado con las propiedades

$$\cancel{\log} [2 \cdot (11-x^2)] = \cancel{\log} (5-x)^2$$

→ tachamos logs de cada lado y cogemos el interior

$$2 \cdot (11-x^2) = (5-x)^2$$

→ Quitamos los paréntesis y ordenamos

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

→ Utilizando:  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x_1 = 3 \quad y \quad x_2 = 1/3$$

→ Resolvemos la ecuación de 2º grado

**Hoja de ejercicios**

- Intenta primero hacerlos sin mirar las pistas

1. Calcular los siguientes logaritmos aplicando la definición.

a)  $\log_2 x = 2$

Pista:  $10^2 = 2x \rightarrow x = 50$

b)  $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{64} = x$

Pista:  $\rightarrow (\sqrt{2})^x = 2^{-6} \rightarrow 2^{x/2} = 2^{-6} \rightarrow \frac{x}{2} = -6 \rightarrow x = -12$

c)  $\log_2 2\sqrt{2} =$

Pista:  $2^x = 2^{3/2} \rightarrow x = 3/2$

3. Calcular:

a)  $\log_2 2^3 \cdot 2^5 = \log_2 2^8 = 8 \log_2 2 = 8$

8

b)  $\log_5 5^2 \cdot 5^3 =$

$5 \log_5 5 = 5$

c)  $\log_{1/5} 5^4 =$

$5^{-x} = 5^4 \rightarrow x = -4$

4. Resuelve los siguientes logaritmos (sin calculadora):

b)  $\log_3 \frac{1}{81} = \log_3 3^{-4} =$

a)  $\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$

c)  $\log_{1/3} 27 = \log_{1/3} 3^3 =$

5. Calcula la expresión (sin calculadora usando las propiedades):

a)  $\log_5 50 - \log_5 2 =$

Pista:  $\log_5 (50/2) = x \rightarrow 5^x = 25 \rightarrow 5^x = 5^2 \rightarrow x = 2$

b)  $\log_3 3^5 - \log_3 3^4 =$

Pista:  $\log_3 (3^5/3^4) = 1$

c)  $\log_2 24 - \log_2 6 =$

Pista:  $\log_2 (24/6) = 2$

6. Escribe las siguientes expresiones como el log de una sola expresión

a)  $3 \log a + 2 \log b - \frac{3}{2} \log c + \frac{5}{2} \log d =$

Pista:  $\log a^3 b^2 - \log \sqrt{c^2} + \log \sqrt{d^5}$

b)  $\frac{1}{2} \log(x^2 + 4) + \frac{1}{2} \log(x + 3) + \frac{1}{2} \log(x - 3) =$

7. Simplifica las expresiones:

a)  $\log A = 3 \log x + 5 \log y$

b)  $\log B = 7 \log x - \frac{1}{2} \log y - \log z$

c)  $\log C = \frac{3}{2} \log a + \frac{5}{3} \log b - 3 \left( \log c + \frac{1}{6} \log d \right)$

Soluc: a)  $A = x^3 \cdot y^5$ , b)  $B = \frac{x^7}{z \cdot \sqrt{y}}$ , c)  $C = \frac{\sqrt{a^3} \sqrt[3]{b^5}}{c^3 \cdot \sqrt{d}}$

8. Resolver las ecuaciones logarítmicas:

a)  $\log x + \log 50 = 3$

Pista:  $\log(x \cdot 50) = \log 1000 \rightarrow 50x = 1000 \rightarrow x = 1000/50 \rightarrow x = 20$

b)  $\log(20x) + \log(2x) = 3$

Pista:  $\log(20x \cdot 2x) = \log(1000) \rightarrow 20x \cdot 2x = 1000 \rightarrow 40x = 1000 \rightarrow x = 25$

c)  $2 \ln x + \ln 3 = 1$

Pista:  $\ln x^2 + \ln 3 = \ln e \rightarrow 3x^2 = e \rightarrow x = \sqrt{e/3}$

d)  $\ln 2x = 3$  (por los dos métodos)

Por el método de la definición:  $e^3 = 2x \rightarrow x = e^3 / 2$

Por cambio de base y propiedades:  $\log 2x / \log e = 3 \rightarrow \log 2x = 3 \log e \rightarrow 2x = e^3 \rightarrow x = e^3 / 2$

9. Resolver las ecuaciones logarítmicas (pistas y soluciones al lado)

$$\log x = 1 + \log(33 - x)$$

$$\log x = \log 10 - \log(33 - x) \rightarrow x = 30$$

$$2 \log x = 3 + \log x/10$$

$$x^2 = 1000 \cdot x/10 \rightarrow x = 100$$

$$2 \log x = \log x/2 - 1$$

$$x^2 = x/20 \rightarrow x = 1/20$$

$$2 \log x - \log(x+6) = 3 \log 2$$

$$x = 12$$

$$3 \log(2a) - 3 \log(3a) - 2 \log(9a) = \log \frac{8}{243}$$

$$\log 3^{-1} = \log a \rightarrow a = 1/3$$

$$3 \log x = \log \left( \frac{x^2}{2} \right) + 2$$

$$\log 2x = 2 \rightarrow 2x = 10^2 \rightarrow x = 50$$

$$\log x + \log 13 = \log 78$$

$$\log x = \log 78 - \log 13 \rightarrow x = 6$$

$$\log \frac{x^2}{x-16} = 2$$

$$x^2 - 100x - 1600 = 0 \rightarrow x = 80 \text{ y } 20$$

$$\frac{\log(35 - x^3)}{\log(5 - x)} = 3$$

$$35 - x^3 = (5 - x)^3 \rightarrow x = 3 \text{ y } 2$$

$$\log x - 3 \log 2 = \log 3 - \log(x+2)$$

$$x^2 + 2x - 24 = 0 \rightarrow x = 4 \text{ pero no } -6 \text{ porque } \log(-6) \text{ no existe}$$

$$5 \log x/2 + 2 \log x/3 = 3 \log x - \log 32/9$$

$$x^4 = 81 \rightarrow x = 3$$

$$2 \log x - \log(x-16) = 2$$

$$x^2 - 100x + 1000 = 0 \rightarrow x = 80 \text{ y } 20$$

$$\log \sqrt{3x-1} - \log \sqrt{2x-3} = 1 - \log 5$$

$$\sqrt{(3x-1)/(2x-3)} = 10/5 \rightarrow x = 13/5$$

$$[\log_2(4x-3) + \log_2 6] / \log_2(5x+1) = 1$$

$$(4x-3)6 = (5x-1) \rightarrow 24x - 18 = 5x + 1 \rightarrow x = 1$$

$$4 \log_2(x^2+1) = \log_2 625$$

$$(x^2+1)^4 = 625 \rightarrow x^2+1 = \sqrt[4]{625} \rightarrow x^2+1 = 5 \rightarrow x = \pm 2$$

$$2 \ln(x-3) = \ln x - \ln 4$$

$$(x-3)^2 = x/4$$

10. Resolver las ecuaciones logarítmicas:

$$b) \log(3x+1) - \log(2x-3) = 1 - \log 5$$

$$\log(3x+1/2x-3) = \log(10/5) \rightarrow 3x+1 = 4x-6 \rightarrow x = 7$$

$$c) \log(20x) + \log(2x) = 3$$

$$20x \cdot 2x = 1000 \rightarrow 40x^2 = 1000 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = 5$$

$$d) \log(x+2) + \log(10x+20) = 3$$

$$(x+2) \cdot (10x+20) = 1000 \rightarrow x^2 + 4x - 96 = 0 \rightarrow x = 8; x \neq -12$$

## Sistemas:

$$x + y = 7$$

$$\log x + \log y = 1$$

$$\rightarrow \log(x \cdot y) = \log 10 \rightarrow x \cdot y = 10 \rightarrow$$

$$x = 7 - y \rightarrow y_1 = 5 \quad y_2 = 2$$

$$2x + y = 12$$

$$\log x - \log y = -1$$

$$x = 1$$

$$x + y = 70$$

$$\log x + \log y = 3$$

$$x = 50 \text{ y } 20$$

$$2 \log x - \log y = -1$$

$$5 \log x + \log y = 6$$

$$x = \sqrt[13]{10^9}$$

**Más ejercicios para practicar...**

1 Conocidos los valores de los logaritmos  $\ln a = 0.6$  y  $\ln b = 2.4$ , calcule:

a)  $\ln \sqrt{a}$       b)  $\ln \sqrt[4]{b}$       c)  $\ln \sqrt{ab}$       d)  $\ln \left( \sqrt[3]{\frac{ab}{e^2}} \right)$       e)  $\ln \left( \frac{\sqrt{a^{-3}}}{\sqrt[3]{b^2}} \right)$

**Sol:** a) 0.3; b) 0.6; c) 1.5; d) 1/3; e) -2.5.

2 Halla:

a)  $\log_2 \left( \frac{\sqrt[3]{64 \cdot 2^3}}{2^4 \cdot \sqrt{128}} \right)$       b)  $\log_3 \left( \frac{\sqrt{3^3 \cdot 9 \cdot 3^{-1}}}{81^2 \cdot 3^{-2}} \right)$       c)  $\log \left( \frac{0.01 \cdot \sqrt[3]{100}}{10^{-1} \cdot 0.1} \right)$       d)  $\log_5 \left( \frac{5^{-2} \cdot \sqrt{625}}{25 \cdot \sqrt{125}} \right)$

e)  $\log_2 \left( \frac{\sqrt{64 \cdot 2^3}}{32 \cdot \sqrt{8}} \right)^2$       f)  $\log \left( \sqrt[3]{\frac{1000 \cdot 10^{-2}}{10^5 \cdot 10^{-1}}} \right)$       g)  $\ln \left( \frac{e^3 \cdot \sqrt{e^3}}{e^2 \cdot e^{-4}} \right)$       h)  $\log_3 \left( \frac{27 \cdot 3}{3^2 \cdot \sqrt{81}} \right)$

i)  $\log_5 \left( \frac{125 \cdot \sqrt{625}}{5^2 \cdot 25^2} \right)$       j)  $\log_4 \left( \frac{16 \cdot 2}{2^2 \cdot \sqrt{8}} \right)$

**Sol:** a) -5/2; b) -9/2; c) 2/3; d) -7/2; e) -1; f) -1; g) 13/2; h) 0; i) -1; j) 3/4.

3 Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a)  $\log x + \log 50 = \log 100$

b)  $\log x^3 = \log 6 + 2 \log x$

c)  $\log x = 1 + \log(22 - x)$

d)  $2 \log x - \log(x - 16) = 2$

e)  $\log x + \log 20 = 3$

f)  $3 \log x + 2 \log x^2 = \log 128$

g)  $1 - \log x = 2 - 2 \log x$

h)  $\log x - \log 2 = 1 + \log(21 - x)$

i)  $\log(7x + 15) - \log 5 = 1$

j)  $2 \log x - \log(x^2 - 2x + 6) = 0$

k)  $2 \log x = \log(10 - 3x)$

l)  $\log(2x - 3) + \log(3x - 2) = 2 - \log 25$

m)  $(x^2 - x + 3) \log(4) = \log 1 - \log 64$

n)  $\log 8 + (x^2 - 5x + 7) \log 3 = \log 24$

ñ)  $2 \log(5x + 4) - 2 \log 2 = \log(x + 4)$

o)  $\log(35 - x^3) = 3 \log(5 - x)$

p)  $2 \log x = 3 + \log(x/10)$

q)  $\log x + \log(x + 3) = 2 \log(x + 1)$

r)  $\log 2 + \log(11 - x^2) = 2 \log(5 - x)$

s)  $\log_2 (\log_2 (x^2)) = 2$

t)  $\log_5 (x^2) + \log_5 10 = \log_5 x + \log_5 50$

u)  $\log_3 \sqrt{x} + \log_3(9x) - 5 = \log_3 (x/3)$

v)  $\log(7 - 3x) - \log(1 - x) = \log 5$

w)  $\log(2x + 16) - \log 18 = \log x$

x)  $\log(x + 1) = \log(\sqrt{x - 1}) + \log(\sqrt{x + 4})$

y)  $\log(x - 1) + \log(3x - 5) = \log(2x - 3)$

**Sol:** a) 2; b) 6; c) 20; d) 80, 20; e) 50; f) 2; g) 10; h) 20; i) 5; j) 3; k) 2; l) 2;

m) No tiene solución; n) 3, 2; ñ) 0; o) 3, 2; p) 100; q) 1; r) 1/3, 3; s)  $\pm 4$ ; t) 5; u) 81.

v) -1; w) 1; x) 5; y) 2.

4 Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a)  $\frac{\log 2 + \log(11 - x^2)}{\log(5 - x)} = 2$

b)  $\log x = \frac{2 - \log x}{\log x}$

c)  $\frac{\log(35 - x^3)}{\log(5 - x)} = 3$

d)  $\log_5 x + \frac{\log_5 125}{\log_5 x} = \frac{7}{2}$

**Sol:** a) 3, 1/3; b) 10, 1/100; c) 3, 2; d) 25,  $\sqrt{125}$ .

**5** Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

- a)  $\log_x 27 = 3$                       b)  $\log_x 20 = 1$                       c)  $4\log_x 125 = 12$   
 d)  $6\log_x 27 = 18$                       e)  $\log_x 4 + \log_x 8 = 5$                       f)  $\log_x 3 + \log_x 9 = 3$   
 g)  $\log_x 108 + \log_x 2 = 3$                       h)  $4\log_x 2 + 3\log_x 8 = 13$                       i)  $\log_x 4 + 2\log_x 32 = 7$

**Sol:** a) 3; b) 20; c) 5; d) 3; e) 2; f) 3; g) 6; h) 2; i) 2.

**6** Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas:

- a)  $\begin{cases} 2\log x - 5\log y = -1 \\ 3\log x + 2\log y = 8 \end{cases}$                       b)  $\begin{cases} 4\log x - 3\log y = -1 \\ \log(xy) = 5 \end{cases}$                       c)  $\begin{cases} \log x + \log y^3 = 5 \\ \log(x^3 / y^2) = 4 \end{cases}$   
 d)  $\begin{cases} \log(x^2 y) = 2 \\ \log(x / y) = 1 \end{cases}$                       e)  $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ x - y = 999 / 10 \end{cases}$                       f)  $\begin{cases} \log x^2 - 3\log y = 2 \\ \log(x / y^2) = 3 \end{cases}$   
 g)  $\begin{cases} \log x - \log y = 7 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$                       h)  $\begin{cases} \log x + 3\log y = 5 \\ \log(x^2 / y) = 3 \end{cases}$                       i)  $\begin{cases} 2\log x^2 - \log y^2 = 4 \\ 2\log x + \log y^2 = 2 \end{cases}$   
 j)  $\begin{cases} x - y = 15 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$                       k)  $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 5 \\ \log_2 x^2 - \log_2 y = 1 \end{cases}$                       l)  $\begin{cases} \log x^2 - 3\log y = -1 \\ \log(xy^2) = 3 \end{cases}$   
 m)  $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$                       n)  $\begin{cases} \log x + \log y = \log 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$                       ñ)  $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ x^2 - y^2 = 11 \end{cases}$

**Sol:** a)  $x = 100, y = 10$ ; b)  $x = 100, y = 1000$ ; c)  $x = 100, y = 10$ ; d)  $x = 10, y = 1$ ;  
 e)  $x = 100, y = 1/10$ ; f)  $x = 10^{-5}, y = 10^{-4}$ ; g)  $x = 10^5, y = 10^{-2}$ ; h)  $x = 100, y = 10$ ;  
 i)  $x = 100, y = 1$ ; j)  $x = -5, y = -20$ ;  $x = 20, y = 5$ ; k)  $x = 4, y = 8$ ; l)  $x = y = 10$ ;  
 m)  $x = 100, y = 10$ ; n)  $x = 1, y = 2$ ;  $x = 2, y = 1$ ; ñ)  $10/3, -1/3$ .

**7** Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

- a)  $3^x = 9$                       b)  $2^x = 128$                       c)  $5^x = 125$   
 d)  $2 \cdot 5^x = 50$                       e)  $4^{x+1} = 16$                       f)  $6^{3x} = 216$   
 g)  $2^{2x-1} = 4$                       h)  $6^{12-3x} = 216$                       i)  $2^{1-x^2} = 1/8$   
 j)  $5^{-x} = 1/25$                       k)  $4^x = 2$                       l)  $9^{x+2} = 1$   
 m)  $8^{x^2+3x+2} = 1$                       n)  $2^{x+2} = 0.5^{2x-1}$                       ñ)  $\sqrt[3]{a^{7-x}} = a^2$   
 o)  $(4^{3-x})^{2-x} = 1$                       p)  $(2/7)^5 = 3.5^{x+1}$                       q)  $10^{x^2-11x+30} = (2 \cdot 5)^2$   
 r)  $3^{2x-1} = \sqrt[3]{9^{x^2-1/4}}$                       s)  $4^x \cdot 5^{x-1} = 1600$                       t)  $3^{x-1} \cdot 2^x = 12$

**Sol:** a) 2; b) 7; c) 3; d) 2; e) 1; f) 1; g) 3/2; h) 3; i)  $\pm 2$ ; j) 2; k) ; l) -2; m) -2, -1; n) -1/3;  
 ñ) 1; o) 3, 2; p) -6; q) 7, 4; r) 11/2, 1/2; s) 3; t) 2.

**8** Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

- a)  $5^x + 5^{x-1} = 30$                       b)  $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$                       c)  $7^{2x+3} - 8 \cdot 7^{x+1} + 1 = 0$   
 d)  $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 117$                       e)  $3^{2(x+1)} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0$                       f)  $2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$   
 g)  $9^x - 3^x - 6 = 0$                       h)  $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 31/5$                       i)  $2^x + 2^{1-x} = 3$   
 j)  $\frac{4^{x-1}}{2^{x+2}} = 128$                       k)  $5^x - \frac{5}{5^{x-1}} - 24 = 0$                       l)  $\frac{6^{x+2}}{6^{2-x^2}} = 1$

**Sol:** a) 2; b) 2, 0; c) -1, -2; d) 3; e) -2, 1; f) 2, 1; g) 1; h) 0; i) 1, 0; j) 11; k) 2; l) -1, 0.

# Exponenciales

**Ecuación exponencial:** es aquella en la que la incógnita aparece como exponente.

Definición:

$$a^x = b \iff \log_a b = x$$

Es la inversa del logaritmo  
(abre el grifo desde la base)

Métodos de resolución:

**Tipo 1:** Intentar que tengan la misma base e igualar los exponentes (regla del cacahuete)

*Ejemplo 1:*  $2^x = 16 \rightarrow 2^x = 2^4 \rightarrow x = 4$

*Ejemplo 2:*  $4^{2x+1} = 8^{2x} \rightarrow (2^2)^{2x+1} = (2^3)^{2x} \rightarrow 4x + 2 = 6x \rightarrow x = 1$

**Tipo 2:** Si no es una suma, añadir  $\log$  a cada miembro para bajar los exponentes

*Ejemplo:*  $2^{2x-1} = 3^x \rightarrow \log 2^{2x-1} = \log 3^x \rightarrow (2x-1) \log 2 = x \cdot \log 3$

**Tipo 3:** Cuando suelen haber sumas o restas, mejor hacer cambio de variable tipo:  $a^x = t$

*Ejemplo:*  $9^x + 3^x = 6642 \rightarrow 3^{2x} + 3^x = 6642 \rightarrow t^2 + t - 6642 = 0$

**Ejercicios:** Resolver las ecuaciones exponenciales por el método más apropiado.

- |     |                                     |                               |                      |  |   |
|-----|-------------------------------------|-------------------------------|----------------------|--|---|
|     |                                     | 14.                           | $4^{x^2+2} = 2^{-2}$ | ( $\nexists$ soluc.)                                   |   |
| 1.  | $3^x = 48$                          | (Soluc: $x \approx 3,5237$ )  | 15.                  | $3^{2x+5} = 3^7$                                       | ( $x=1$ )                               |
| 2.  | $2^x = \frac{8}{27}$                | (Soluc: $x \approx -1,7549$ ) | 16.                  | $\frac{1}{e^x} = 27$                                   | ( $x \approx -3,2958$ )                 |
| 3.  | $2^{x+1} + 4 = 80$                  | (Soluc: $x \approx 5,2479$ )  | 17.                  | $5^{x^2-5x+6} = 1$                                     | ( $x_1=2, x_2=3$ )                      |
| 4.  | $2 \cdot 3^x - 3^{2x} + 3 = 0$      | (Soluc: $x=1$ )               | 18.                  | $3^x \cdot (3^2)^x = 9^3$                              | ( $x=2$ )                               |
| 5.  | $3^{x-1} + 3^{x+1} - 3^x = 63$      | (Soluc: $x=3$ )               | 19.                  | $e^{2x} - 2e^{x+1} + e^2 = 0$                          | ( $x=1$ )                               |
| 6.  | $2^{2x-3} = 8^{x+1}$                | (Soluc: $x=-6$ )              | 20.                  | $2^x - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$                          | ( $x \approx 0,8301$ )                  |
| 7.  | $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$           | (Soluc: $x=2$ )               | 21.                  | $2^{x+2} + 2^{x+3} + 2^{x+4} + 2^{x+5} + 2^{x+6} = 31$ | ( $x=-2$ )                              |
| 8.  | $2^{x-3} = -3$                      | (Soluc: $\nexists$ soluc.)    | 22.                  | $e^{4x} - 5e^{3x} + 5e^{2x} + 5e^x - 6 = 0$            | (Soluc: $x_1=0, x_2=\ln 2; x_3=\ln 3$ ) |
| 9.  | $5^{x-1} = 2 + \frac{3}{5^{x-2}}$   | (Soluc: $x=2$ )               | 23.                  | $2^{x+1} = 4^{2x-4}$                                   | (Soluc: $x=3$ )                         |
| 10. | $2e^{x-4} = 3$                      | (Soluc: $x \approx 4,4055$ )  | 24.                  | $e^{x-1} = 0$  | (Soluc: $\nexists$ soluc.)              |
| 11. | $2 + e^{x-4} = 3$                   | (Soluc: $x=4$ )               | 25.                  | $x^2 e^x - 5x e^x + 6e^x = 0$                          | (Sol: $x_1=2, x_2=3$ )                  |
| 12. | $100 \cdot 10^x = \sqrt[3]{1000^5}$ | (Soluc: $x=3$ )               | 26.                  | $3^{2x} \cdot 2^{3x-1} = 6^{x+1}$                      | (Soluc: $x=1$ )                         |
| 13. | $3^{x/2} = 768$                     | (Soluc: $x \approx 12,0949$ ) | 31.                  | $e^{x-9} = \sqrt{73}$                                  | $x \approx 11,1452$                     |
| 27. | $e^{4x-x^2} = e^3$                  | $x_1=1, x_2=3$                | 32.                  | $2^{x+9} = 3^x$  | $x \approx 15,38$                       |
| 28. | $2^{x-3} = 3^{x+1}$                 | $x \approx -7,8380$           | 33.                  | $2^{1-x^2} = \frac{1}{8}$                              | $x = \pm 2$                             |
| 29. | $2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$  | $x_1=1, x_2=2$                | 34.                  | $10^{3-x} = 1$   | $x=3$                                   |
| 30. | $3^{2x-4} = 729$                    | $x=5$                         |                      |  |   |

**Problemas con logaritmos:**

**PAU - Social 2016 - 4.** Durant la darrera epidèmia d'Ebola es va considerar que, sense cap intervenció, el virus es propagava augmentant en un 3% diari el nombre d'afectats. Suposeu que, en una població, avui, hi ha 25 persones infectades

- Escriviu la fórmula de la funció que dona el nombre de persones infectades en passar els dies. Quantes persones estaran infectades al cap de 20 dies?
- A partir d'una data determinada, en aquesta població s'apliquen unes mesures sanitàries que permeten que el nombre de persones infectades disminueixi segons la funció  $g(x) = 1000 \cdot (0.95)^x$ . Si considerem controlada l'epidèmia quan el nombre d'afectats es igual o inferior a 10 persones, quants dies hauran de passar després d'aplicar les mesures sanitàries per a poder declarar controlada l'epidèmia?

$$a) f(x) = 25 \cdot 1,03^x \rightarrow f(20) = 25 \cdot 1,03^{20} = 45 \text{ o } 46 \text{ persones infectades.}$$

$$b) 1000 \cdot (0.95)^x = 10 \rightarrow 0,95^x = 0,01 \rightarrow x = \frac{\ln 0,01}{\ln 0,95} = 89.78\dots$$

- El servicio de control de calidad de una empresa que fabrica lavadoras ha comprobado que el porcentaje de lavadoras que sigue funcionando al cabo de  $t$  años viene dado por la función  $f(t) = (8/9)^t$ .
  - ¿Qué proporción de lavadoras siguen funcionando después de 5 años? ¿Y después de 15 años?
  - ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que funcionen el 40% de las lavadoras fabricadas?

Sol: 7,8 años

- El crecimiento de un bosque viene dado por la función  $F(t) = A \cdot (1+i)^t$  donde  $F$  es la madera que habrá dentro de  $t$  años,  $A$  la madera actual, e  $i$  la tasa de crecimiento anual. Si la tasa de crecimiento anual  $i = 0,02$  y se mantiene constante, calcula el tiempo que tardará en duplicarse la madera del bosque.

$$2A = A \cdot (1+0,02)^t \rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1,02} = 35$$

- Calcula el tiempo que tengo que tener invertido 2500 € al 6% de interés compuesto si quiero obtener 1977,12 € de beneficio.

$$C_f = C_i \cdot (1+r)^t \rightarrow t = \frac{\log 4477,12 - \log 2500}{\log(1+0,06)} = 10 \text{ años}$$