

Polinomios

Sumar y restar: se suman/restan los coeficientes (numericos de delante) de los terminos semejantes y si no tiene, se pone un 1. Ejemplos:

$$2x - 5x + 7x + x = 5x$$

$$2x^2y - 3x^2y + 5x^2y = 4x^2y$$

Multiplicar: Se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes: ejemplo: $2x^2 \cdot 4x^3 = 8x^5$

Forma de mostrar un polinomio:

Forma polinómica: $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \rightarrow$ sumando o restando términos

Forma factorizada: $P(x) = (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) \rightarrow$ multiplicándose por parejas

Para pasar de forma factorizada a polinómica:

Multiplicando los factores: $(x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)$:

$$\begin{array}{r} (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) \\ \begin{array}{r} x+1 \\ x+2 \\ \hline 2x+2 \\ x^2+1x \\ \hline x^2+3x+2 \end{array} \end{array} \begin{array}{r} \begin{array}{r} x^2+3x+2 \\ x+3 \\ \hline 3x^2+9x+6 \\ x^3+3x^2+2x \\ \hline x^3+6x^2+11x+6 \end{array} \end{array}$$

Obtenemos: $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

Para pasar de forma polinómica a factorizada:

1º: Intentar sacar algún factor común o ver si es el resultado de una expresión notable.

2º: Ir dividiendo por $x \pm \text{algo}$ utilizando la regla de Ruffini

Ir probando ese algo para que la división sea exacta, es decir, el resto sea 0. Para ello sabemos que tiene que ser múltiplo del último número.

$$\begin{array}{cccc} \textcircled{1}x^3 & \textcircled{+}6x^2 & \textcircled{+}11x & \textcircled{+}6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \begin{array}{r} 1 \quad 6 \quad 11 \quad 6 \\ -2 \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \hline 1 \quad 4 \quad 3 \quad 0 \end{array} & \Rightarrow & 1x^3 + 6x^2 + 11x + 6 : (x+2) & \\ \downarrow & & & \\ \begin{array}{r} 1 \quad 4 \quad 3 \quad 0 \\ -3 \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \hline 1 \quad 1 \quad 0 \end{array} & \Rightarrow & 1x^2 + 4x + 3 : (x+3) & \\ \downarrow & & & \\ \begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad 0 \\ -1 \quad \downarrow \\ \hline 1 \quad 0 \end{array} & \Rightarrow & 1x + 1 & \\ & & & \\ & & & P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+2) \cdot (x+3) \cdot (x+1) \end{array}$$

Simplificar fracciones algebraicas:

- 1º. Sacar factor común si es posible antes.
- 2º. Factorizar numerador y denominador.
- 3º. Tachar los factores iguales arriba y abajo:

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}{(x+2)^2} = \frac{\cancel{(x+2)} \cdot (x+3) \cdot (x+1)}{\cancel{(x+2)} \cdot (x+2)}$$

Soluciones (o raíces) de una ecuación de 3er grado y superior:

Para resolver ecuaciones de 3er grado y superiores, pasarlas a forma factorizada. Al igualar esta a cero, cada pareja factorial también puede ser cero por lo que se descompone en varias mini-ecuaciones de primer grado.

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$$

↓

$$(x+2) \cdot (x+3) \cdot (x+1) = 0$$

$x+1=0 \rightarrow \boxed{x_1 = -1}$

$x+2=0 \rightarrow \boxed{x_2 = -2}$

$x+3=0 \rightarrow \boxed{x_3 = -3}$

Teorema del resto:

En vez de sustituir la x en el polinomio para ver cuanto vale, lo divides por Ruffini por ese numero y el resto es el resultado. Es útil cuando el polinomio tiene potencias altas.

- Valor del polinomio por el método tradicional:

$$P(X) = X^4 - 3X^2 + 2 \rightarrow P(3) = 3^4 + 3 \cdot 3^2 + 2 = \boxed{56} \leftarrow \text{Valor del polinomio}$$

- Valor del polinomio por el método del teorema del resto:

$$P(X) = X^4 - 3X^2 + 2 = 1x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x + 2$$

↓	↓	↓	↓	↓	
1	0	-3	0	2	
	+	+	+	+	
3	3	9	18	54	
P(3) =	1	3	6	18	56

← Valor del polinomio

Repaso de expresiones frecuentes (fórmulas notables):

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2 \rightarrow$ Desarrollo del cuadrado de un binomio
- $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2 \rightarrow$ Suma por diferencia de binomios o por su conjugado

Ejemplos: $(x+3)^2 = (a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2) = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$
 $(x+3) \cdot (x-3) = (a^2 - b^2) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$

Ejercicios:

→ soluciones en siguiente página←

1. **Calcula el valor del polinomio:** $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 6$ para $x=3$ mediante dos métodos:
 a) Sustituyendo el valor en el polinomio b) Por el *teorema del resto* de la división

2. **Divide aplicando la regla de Ruffini:** $P(x) = x^5 - x^3 - 2x^2 - 3x - 5 : (x-2)$

3. **Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones:**

- a. $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$
 b. $2x^3 - x^2 - 4 = 0$
 c. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$
 d. $x^4 - x^3 - 16x^2 - 20x = 0$

4. **Determina las raíces de las siguientes ecuaciones de 3er grado:**

- a) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ b) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ c) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$
 d) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ e) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$ f) $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$
 g) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$ h) $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$ i) $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$

5. **Determina las raíces de las siguientes ecuaciones de 4º grado:**

- a) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ b) $x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$
 c) $x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4 = 0$ d) $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4 = 0$
 e) $x^4 + 9x^3 + 30x^2 + 44x + 24 = 0$ f) $x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 20x - 24 = 0$
 g) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ h) $x^4 - x^3 - 11x^2 + 5x + 30 = 0$
 i) $2x^4 + 3x^3 - x = 0$ j) $3x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 8x + 4 = 0$

6. **Factoriza los siguientes polinomios:**

- a) $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x$ b) $P(x) = 3x^3 + 3x^2 - 18x$
 c) $P(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24$ d) $P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$
 e) $P(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 3x^2$ f) $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 12x$
 g) $P(x) = 3x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 6x + 3$ h) $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$
 i) $P(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4$ j) $P(x) = 4x^4 - 6x^3 + 2x^2$

7. **Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los polinomios P(x) y Q(x):**

- a) $P(x) = x^2 + 2x + 1$ y $Q(x) = 3x + 3$ b) $P(x) = x^3 - 2x^2$ y $Q(x) = x^3 - 4x$

- 8.- **Simplifica las fracciones polinómicas:**

- a) $\frac{x^4 - 10x^2 + 9}{(x^2 - 3)^2}$ b) $\frac{x^2 - 1}{x^4 - 1}$ c) $\frac{x^4 - 5x^2 - 36}{x^2 - 9}$ d) $\frac{x^2 + 8x + 7}{x^2 + 9x + 14}$ e) $\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$

9. **Desarrolla las siguientes expresiones notables:**

- a) $(x-4)^2$ b) $(x^2-3)^2$ c) $(2-5x) \cdot (2+5x)$

10. **Opera las fracciones:**

- a) $\frac{-3x+1}{x+1} - \frac{5x+1}{x^2+x}$ b) $\frac{3}{x^2-1} + \frac{5x}{x+1} - \frac{2x}{x-1}$

→ **Hoja de soluciones 1:**

1.- $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 6 \rightarrow$ a: $P(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2 - 6 = 81 - 2 \cdot 27 + 9 - 6 = 30$

b:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & 0 & 3 & -6 \\ 3 & & 3 & 3 & 9 & 36 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & 12 & \boxed{30} \end{array}$$

2.- **Divide aplicando la regla de Ruffini:** $P(x) = (x^5 - x^3 - 2x^2 - 3x - 5):(x-2)$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -5 \\ 2 & & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \boxed{5} \end{array} \rightarrow x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 \quad R: 5$$

3.- **Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones:**

- a. $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow R: -2 \text{ y } 1 \rightarrow (x+2)(x+2)(x-1)(x-1)$
- b. $2x^3 - x^2 - 4 = 0 \rightarrow R: 2$
- c. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0 \rightarrow R: 2, -3$
- d. $x^4 - x^3 - 16x^2 - 20x = 0 \rightarrow$ 1º Sacar factor común a la x: $\rightarrow x \cdot (x^3 - x^2 - 16x - 20) = 0$
2º Hacer el Ruffini de: 1 -1 16 -20 $\rightarrow R: 0, 5, -2, -2$

4. **Determina las raíces de las siguientes ecuaciones de 3er grado:**

- a) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$
- b) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$
- c) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$
- d) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$
- e) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$
- f) $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$
- g) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$
- h) $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$
- i) $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$

- Sol: a) $x = r1, x = 2;$ b) $x = r1, x = 3;$ c) $x = 1$ (doble), $x = 3;$
 d) $x = 1$ (doble), $x = 2;$ e) $x = 1, x = 2$ (doble); f) $x = -2, x = 2$ (doble);
 g) $x = 2, x = -2$ (doble); h) $x = -1, x = -2$ (doble); i) $x = 2, x = -1, x = -4;$

5. **Determina las raíces de las siguientes ecuaciones de 4º grado:**

- a) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$
- b) $x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$
- c) $x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4 = 0$
- d) $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4 = 0$
- e) $x^4 + 9x^3 + 30x^2 + 44x + 24 = 0$
- f) $x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 20x - 24 = 0$
- g) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$
- h) $x^4 - x^3 - 11x^2 + 5x + 30 = 0$
- i) $2x^4 + 3x^3 - x = 0$
- j) $3x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 8x + 4 = 0$

- Sol: a) $x = 1$ (doble), $x = -1$ (doble); b) $x = -2, x = -1, x = 1$ (doble);
 c) $x = 2$ (doble), $x = r1;$ d) $x = -1$ (doble), $x = -2$ (doble); e) $x = -3, x = -2$ (triple);
 f) $x = -2$ (doble), $x = 2, x = -3;$ g) $x = r1, x = -3, x = 2;$ h) $x = 3, x = -2, x = r 5;$
 i) $x = -1$ (doble), $x = 1/2, x = 0;$ j) $x = 1, x = -1/3, x = r2;$

→ **Hoja de soluciones 2:**

6. Factorice los siguientes polinomios:

- a) $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x$
- b) $P(x) = 3x^3 + 3x^2 - 18x$
- c) $P(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24$
- d) $P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$
- e) $P(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 3x^2$
- f) $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 12x$
- g) $P(x) = 3x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 6x + 3$
- h) $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$
- i) $P(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4$
- j) $P(x) = 4x^4 - 6x^3 + 2x^2$

Sol: a) $(x-1)^2 \cdot (x+1) \cdot x$; b) $(x+3) \cdot (x-2) \cdot 3x$; c) $(x-1) \cdot (x+4) \cdot (x-2) \cdot (x-3)$;
 d) $(x^2+1) \cdot (x-2) \cdot (x-1)$; e) $x^2 \cdot (x-1) \cdot 2 \cdot (x-3)$; f) $(x+2) \cdot (x-3) \cdot 2x$; g) $3 \cdot (x+1)^2 \cdot (x^2+1)$;
 h) $(x-2) \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x+3)$; i) $(x+1) \cdot (x+2) \cdot (x^2+2)$; j) $2x^2 \cdot (x-1) \cdot (2x-1)$.

7. Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo en cada caso:

- a) $P(x) = x^2 + 2x + 1$ y $Q(x) = 3x + 3$
- b) $P(x) = x^3 - 2x^2$ y $Q(x) = x^3 - 4x$

Sol: a) mcm: $3 \cdot (x+1)^2$; mcd: $(x+1)$; b) mcm: $x^2 \cdot (x-4) \cdot (x+4)$; mcd: $(x-2) \cdot x$.

8.- Simplificar fracciones polinómicas:

a) $\frac{x^4 - 10x^2 + 9}{(x^2 - 3)^2}$

3	1	0	-10	0	9
	3	9	-3	-9	
-1	1	3	-1	-3	0
	-1	-2	3		
+1	1	2	-3	0	
	1	3			
-3	1	3	0		
	-3	-3			
	1	0			

$\frac{(x-3) \cdot (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x+3)}{(x+3) \cdot (x-3)} = (x+1) \cdot (x-1) = x^2 - 1$

b) $\frac{x^2 - 1}{x^4 - 1} = \frac{(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)} = \frac{1}{x^2 + 1}$

c) $\frac{x^4 - 5x^2 - 36}{x^2 - 9} = \frac{(x+3)(x-3)(x^2+4)}{(x-3)(x-3)} = \frac{x^2 + 4}{x - 3}$

3	1	0	-5	0	-36
	3	9	12	36	
-3	1	3	4	12	0
	-3	-3	6	-12	
	1	0	4	0	
	↓		↓		
		x^2	$+4$		

d) $\frac{x^2 + 8x + 7}{x^2 + 9x + 14} = \frac{(x+7) \cdot (x+1)}{(x+7) \cdot (x+2)} = \frac{x+1}{x+2}$

e) $\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6} = \frac{(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x-2)}{(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x+3)} = \frac{(x+1)}{(x+3)}$

9. Desarrolla las siguientes expresiones notables:

- a) $(x-4)^2 = (a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2) = x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$
- b) $(x^2-3)^2 = (a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2) = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 3 + 3^2 = x^4 - 6x^2 + 9$
- c) $(2-5x) \cdot (2+5x) = (a^2 - b^2) = 2^2 - (5x)^2 = 4 - 25x^2$

10. Opera las fracciones:

a) $\frac{-3x+1}{x+1} - \frac{5x+1}{x^2+x} = \frac{x(-3x+1) - (5x+1)}{x(x+1)} = \frac{-3x^2-4x-1}{x(x+1)}$

b) $\frac{3}{x^2-1} + \frac{5x}{x+1} - \frac{2x}{x-1} = \frac{3+5x(x-1)-2x(x+1)}{(x+1) \cdot (x-1)} = \frac{3x^2-7x+3}{x^2-1}$