

Polinomios

- **Sumar y restar:** se suman/restan los coeficientes (numericos de delante) de los terminos semejantes y si no tiene, se pone un 1. Ejemplos:
 - $2x - 5x + 7x + x = 5x$
 - $2x^2y - 3x^2y + 5x^2y = 4x^2y$
- **Multiplicar:** Se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes: ejemplo: $2x^2 \cdot 4x^3 = 8x^5$

Forma de mostrar un polinomio:

- Forma polinómica: $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \rightarrow$ sumando o restando términos
- Forma factorizada: $P(x) = (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) \rightarrow$ multiplicándose por parejas

Para pasar de forma factorizada a polinómica:

Multiplicando los factores: $(x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)$:

$$\begin{array}{r}
 (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) \\
 \begin{array}{r}
 x+1 \\
 x+2 \\
 \hline
 2x+2 \\
 x^2+1x \\
 \hline
 x^2+3x+2
 \end{array}
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{r}
 x+3 \\
 \hline
 x^2+3x+2 \\
 \hline
 3x^2+9x+6 \\
 x^3+3x^2+2x \\
 \hline
 x^3+6x^2+11x+6
 \end{array}$$

Obtenemos: $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

Para pasar de forma polinómica a factorizada:

- 1º: Intentar sacar algún factor común o ver si es el resultado de una expresión notable.
- 2º: Ir dividiendo por $x \pm \text{algo}$ utilizando la regla de Ruffini

Ir probando ese **algo** para que la división sea exacta, es decir, el resto sea 0. Para ello sabemos que tiene que ser múltiplo del último número.

$$\begin{array}{cccc}
 \textcircled{1}x^3 & \textcircled{+}6x^2 & \textcircled{+}11x & \textcircled{+}6 \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \begin{array}{r}
 1 \quad 6 \quad 11 \quad 6 \\
 \downarrow \\
 1 \quad 6 \quad 11 \quad 6 \\
 -2 \quad -2 \quad -8 \quad -6 \\
 \hline
 1 \quad 4 \quad 3 \quad 0
 \end{array}
 & \Rightarrow & 1x^3 + 6x^2 + 11x + 6 : (x+2) \\
 \\
 \begin{array}{r}
 1 \quad 4 \quad 3 \quad 0 \\
 \downarrow \\
 1 \quad 4 \quad 3 \quad 0 \\
 -3 \quad -3 \quad -3 \\
 \hline
 1 \quad 1 \quad 0
 \end{array}
 & \Rightarrow & 1x^2 + 4x + 3 : (x+3) \\
 \\
 \begin{array}{r}
 1 \quad 1 \quad 0 \\
 \downarrow \\
 1 \quad 1 \quad 0 \\
 -1 \quad -1 \\
 \hline
 1 \quad 0
 \end{array}
 & \Rightarrow & 1x + 1
 \end{array}$$

$P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+2) \cdot (x+3) \cdot (x+1)$

Para simplificar fracciones algebraicas:

- 1º. Sacar factor común si es posible antes.
- 2º. Factorizar numerador y denominador.
- 3º. Tachar los factores iguales arriba y abajo:

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}{(x+2)^2} = \frac{\cancel{(x+2)} \cdot (x+3) \cdot (x+1)}{\cancel{(x+2)} \cdot (x+2)}$$

Soluciones (o raíces) de una ecuación de 3er grado y superior:

Para resolver ecuaciones de 3er grado y superiores, pasarlas a forma factorizada. Al igualar esta a cero, cada pareja factorial también puede ser cero por lo que se descompone en varias mini-ecuaciones de primer grado.

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$$

↓

$$(x+2) \cdot (x+3) \cdot (x+1) = 0$$

$x+1=0 \rightarrow \boxed{x_1 = -1}$

$x+2=0 \rightarrow \boxed{x_2 = -2}$

$x+3=0 \rightarrow \boxed{x_3 = -3}$

Teorema del resto:

En vez de sustituir la x en el polinomio para ver cuanto vale, lo divides por Ruffini por ese numero y el resto es el resultado. Es útil cuando el polinomio tiene potencias altas.

- Valor del polinomio por el método tradicional:

$$P(X) = X^4 - 3X^2 + 2 \rightarrow P(3) = 3^4 + 3 \cdot 3^2 + 2 = \boxed{56} \leftarrow \text{Valor del polinomio}$$

- Valor del polinomio por el método del teorema del resto:

$$P(X) = X^4 - 3X^2 + 2 = 1x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x + 2$$

↓	↓	↓	↓	↓	
1	0	-3	0	2	
	+	+	+	+	
3	3	9	18	54	
P(3) =	1	3	6	18	56

← Valor del polinomio

Repaso de expresiones frecuentes (fórmulas notables):

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2 \rightarrow$ Desarrollo del cuadrado de un binomio
- $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2 \rightarrow$ Suma por diferencia de binomios o por su conjugado

Ejemplos: $(x+3)^2 = (a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2) = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$
 $(x+3) \cdot (x-3) = (a^2 - b^2) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$

Ejercicios:

(soluciones siguiente página)

1. **Calcula el valor del polinomio:** $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 6$ para $x=3$ mediante dos métodos:

- a) Sustituyendo el valor en el polinomio b) Por el *teorema del resto* de la división

2. **Divide aplicando la regla de Ruffini:** $P(x) = x^5 - x^3 - 2x^2 - 3x - 5 : (x-2)$

3. **Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones:**

- a. $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$
 b. $2x^3 - x^2 - 4 = 0$
 c. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$
 d. $x^4 - x^3 - 16x^2 - 20x = 0$

4. **Determina las raíces de las siguientes ecuaciones de 3er grado:**

- a) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ b) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ c) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$
 d) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ e) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$ f) $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$
 g) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$ h) $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$ i) $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$

5. **Determina las raíces de las siguientes ecuaciones de 4º grado:**

- a) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ b) $x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$
 c) $x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4 = 0$ d) $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4 = 0$
 e) $x^4 + 9x^3 + 30x^2 + 44x + 24 = 0$ f) $x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 20x - 24 = 0$
 g) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ h) $x^4 - x^3 - 11x^2 + 5x + 30 = 0$
 i) $2x^4 + 3x^3 - x = 0$ j) $3x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 8x + 4 = 0$

6. **Factoriza los siguientes polinomios:**

- a) $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x$ b) $P(x) = 3x^3 + 3x^2 - 18x$
 c) $P(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24$ d) $P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$
 e) $P(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 3x^2$ f) $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 12x$
 g) $P(x) = 3x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 6x + 3$ h) $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$
 i) $P(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4$ j) $P(x) = 4x^4 - 6x^3 + 2x^2$

7. **Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los polinomios P(x) y Q(x):**

- a) $P(x) = x^2 + 2x + 1$ y $Q(x) = 3x + 3$ b) $P(x) = x^3 - 2x^2$ y $Q(x) = x^3 - 4x$

8.- **Simplifica las fracciones polinómicas:** a) $\frac{x^4 - 10x^2 + 9}{(x^2 - 3)^2}$ b) $\frac{x^2 - 1}{x^4 - 1}$

- c) $\frac{x^4 - 5x^2 - 36}{x^2 - 9}$ d) $\frac{x^2 + 8x + 7}{x^2 + 9x + 14}$ e) $\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$

9. **Desarrolla las siguientes expresiones notables:**

- a) $(x-4)^2$ b) $(x^2-3)^2$ c) $(2-5x) \cdot (2+5x)$

10. **Opera las fracciones:** $\frac{-3x+1}{x+1} - \frac{5x+1}{x^2+x}$

Hoja de soluciones:

1.- $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 6 \rightarrow$ a: $P(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2 - 6 = 81 - 2 \cdot 27 + 9 - 6 = 30$

b:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & 0 & 3 & -6 \\ 3 & & 3 & 3 & 9 & 36 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & 12 & 30 \end{array}$$

2.- Divide aplicando la regla de Ruffini: $P(x) = (x^5 - x^3 - 2x^2 - 3x - 5):(x-2)$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -5 \\ 2 & & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \end{array} \rightarrow x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 \quad R: 5$$

3.- Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones:

- a. $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow R: -2 \text{ y } 1 \rightarrow (x+2)(x+2)(x-1)(x-1)$
 b. $2x^3 - x^2 - 4 = 0 \rightarrow R: 2$
 c. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0 \rightarrow R: 2, -3$
 d. $x^4 - x^3 - 16x^2 - 20x = 0 \rightarrow$ 1º Sacar factor común a la x: $\rightarrow x \cdot (x^3 - x^2 - 16x - 20) = 0$
 2º Hacer el Ruffini de: $1 \quad -1 \quad 16 \quad -20 \rightarrow R: 0, 5, -2, -2$

4. Determina las raíces de las siguientes ecuaciones de 3er grado:

- a) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ b) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ c) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$
 d) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ e) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$ f) $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$
 g) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$ h) $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$ i) $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$

- Sol: a) $x = r1, x = 2;$ b) $x = r1, x = 3;$ c) $x = 1$ (doble), $x = 3;$
 d) $x = 1$ (doble), $x = 2;$ e) $x = 1, x = 2$ (doble); f) $x = -2, x = 2$ (doble);
 g) $x = 2, x = -2$ (doble); h) $x = -1, x = -2$ (doble); i) $x = 2, x = -1, x = -4;$

5. Determina las raíces de las siguientes ecuaciones de 4º grado:

- a) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ b) $x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$
 c) $x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4 = 0$ d) $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4 = 0$
 e) $x^4 + 9x^3 + 30x^2 + 44x + 24 = 0$ f) $x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 20x - 24 = 0$
 g) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ h) $x^4 - x^3 - 11x^2 + 5x + 30 = 0$
 i) $2x^4 + 3x^3 - x = 0$ j) $3x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 8x + 4 = 0$

- Sol: a) $x = 1$ (doble), $x = -1$ (doble); b) $x = -2, x = -1, x = 1$ (doble);
 c) $x = 2$ (doble), $x = r1$; d) $x = -1$ (doble), $x = -2$ (doble); e) $x = -3, x = -2$ (triple);
 f) $x = -2$ (doble), $x = 2, x = -3$; g) $x = r1, x = -3, x = 2$; h) $x = 3, x = -2, x = r5$;
 i) $x = -1$ (doble), $x = 1/2, x = 0$; j) $x = 1, x = -1/3, x = r2$;

6. Factorice los siguientes polinomios:

- a) $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x$
- b) $P(x) = 3x^3 + 3x^2 - 18x$
- c) $P(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24$
- d) $P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$
- e) $P(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 3x^2$
- f) $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 12x$
- g) $P(x) = 3x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 6x + 3$
- h) $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$
- i) $P(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4$
- j) $P(x) = 4x^4 - 6x^3 + 2x^2$

Sol: a) $(x - 1)^2 \cdot (x + 1) \cdot x$; b) $(x + 3) \cdot (x - 2) \cdot 3x$; c) $(x - 1) \cdot (x + 4) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$;
 d) $(x^2 + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 1)$; e) $x^2 \cdot (x - 1) \cdot 2 \cdot (x - 3)$; f) $(x + 2) \cdot (x - 3) \cdot 2x$; g) $3 \cdot (x + 1)^2 \cdot (x^2 + 1)$;
 h) $(x - 2) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 3)$; i) $(x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x^2 + 2)$; j) $2x^2 \cdot (x - 1) \cdot (2x - 1)$.

7. Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo en cada caso:

- a) $P(x) = x^2 + 2x + 1$ y $Q(x) = 3x + 3$
- b) $P(x) = x^3 - 2x^2$ y $Q(x) = x^3 - 4x$

Sol: a) mcm: $3 \cdot (x + 1)^2$; med.: $(x + 1)$; b) mcm: $x^2 \cdot (x - 4) \cdot (x + 4)$; med.: $(x - 2) \cdot x$.

8.- Simplificar fracciones polinómicas:

a) $\frac{x^4 - 10x^2 + 9}{(x^2 - 3)^2}$

3	1	0	-10	0	9
	3	9	-3	-9	
-1	1	3	-1	-3	0
	-1	-2	3		
+1	1	2	-3	0	
	1	3			
-3	1	3	0		
	-3				
	1	0			

$\frac{(x-3) \cdot (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x+3)}{(x+3) \cdot (x-3)} = (x+1) \cdot (x-1) = x^2 - 1$

b) $\frac{x^2 - 1}{x^4 - 1} = \frac{(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)} = \frac{1}{x^2 + 1}$

c) $\frac{x^4 - 5x^2 - 36}{x^2 - 9} = \frac{(x+3)(x-3)(x^2+4)}{(x-3)(x-3)} = x^2 - 4$

3	1	0	-5	0	-36
	3	9	12	36	
-3	1	3	4	12	0
	-3	6	-12		
	1	0	4	0	
	↓	↓	↓		
	x ²	+4			

d) $\frac{x^2 + 8x + 7}{x^2 + 9x + 14} = \frac{(X+7) \cdot (X+1)}{(X+7)(X+2)} = \frac{X+1}{X+2}$

e) $\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6} = \frac{(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x-2)}{(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x+3)} = \frac{(x+1)}{(x+3)}$

9. Desarrolla las siguientes expresiones notables:

- a) $(x-4)^2 = (a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2) = x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$
- b) $(x^2-3)^2 = (a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2) = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 3 + 3^2 = x^4 - 6x^2 + 9$
- c) $(2-5x) \cdot (2+5x) = (a^2 - b^2) = 2^2 - (5x)^2 = 4 - 25x^2$

10. Opera las fracciones: $\frac{-3x+1}{x+1} - \frac{5x+1}{x^2+x} = \frac{x(-3x+1) - (5x+1)}{x(x+1)} = \frac{-3x^2-4x-1}{x(x+1)}$