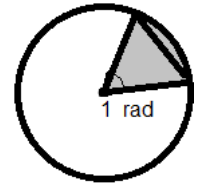


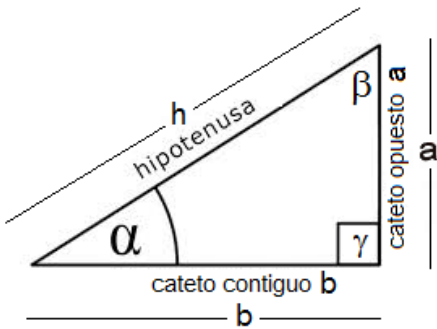
TRIGONOMETRÍA

Sistema circular. Grados y radianes

- Se llama **radián** al ángulo que forma un arco de longitud igual al radio.
- Una circunferencia completa tiene **360º** y perímetro **2πr** por lo que caben: $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ radianes.
- Pasar de grados a radianes: con la siguiente proporcionalidad directa $\rightarrow \frac{360}{2\pi} = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow x = \frac{2\pi\alpha}{360} = \frac{\pi\alpha}{180}$ **radianes**



Razones Trigonómicas en un triángulo rectángulo.



Relación entre ángulos: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
 $\alpha + \beta = 90^\circ$

Relación entre lados: $h^2 = a^2 + b^2$

Relación entre ángulos y lados: $\sin \alpha = \frac{a}{h}$
 $\cos \alpha = \frac{b}{h}$
 $\tan \alpha = \frac{a}{b}$

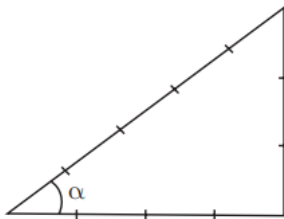
Relacions trigonomètriques:

- sinus $\alpha = a/h =$ (catet oposat dividit entre hipotenusa)
- cosinus $\alpha = b/h =$ (catet contigu dividit entre hipotenusa)
- tangent $\alpha = a/b =$ (catet oposat dividit entre catet contigu)

Altres relacions:

- Relac. fonamental: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- Tangent $\alpha =$ pendent = $\frac{\text{Vert.}}{\text{Horiz.}} = \frac{\sin x}{\cos x}$

Exercicis:

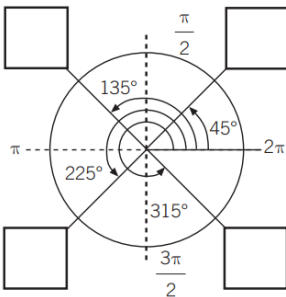


Determina les raons trigonomètriques de l'angle α en el triangle de la figura:

$\sin \alpha = \frac{a}{h} = \frac{3}{5}$

$\cos \alpha = \frac{b}{h} = \frac{4}{5}$

$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{3}{4}$



Converteix en radians els angles que corresponen a cada casella:

45º =

135º =

225º =

315º =



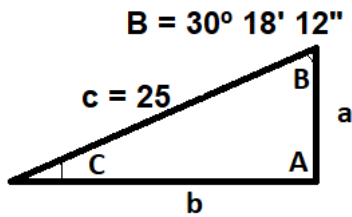
Calcula els valors del sinus, el cosinus i la tangent dels angles α i β .

Sin $\alpha =$ Cos $\alpha =$ tan $\alpha =$

Sin $\beta =$ Cos $\beta =$ tan $\beta =$

Resolución de triángulos rectángulos.

Resuelve el siguiente triángulo rectángulo si el ángulo $B = 80^\circ 18' 12''$ y la hipotenusa mide 25 m:

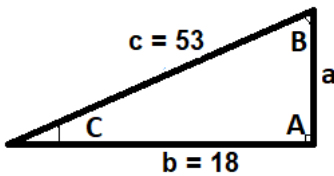


Ángulos:
 $A = 90^\circ$,
 $B = 80^\circ 18' 12''$
 $C = 90^\circ - 80^\circ 18' 12'' = 9^\circ 41' 48''$

Lados:
 De la definición de seno: $\text{sen } B = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \text{ sen } B =$
 $= 25 \cdot 0,9857 = 24,6 \text{ m.}$

De la definición de coseno: $\text{cos } B = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \text{ cos } B =$
 $= 25 \cdot 0,1684 = 4,2 \text{ m.}$

Resuelve el triángulo sabiendo que $b = 18 \text{ cm.}$ y $c = 23 \text{ cm.}$



Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{18^2 + 23^2} = \sqrt{324 + 529} = \sqrt{853} = 29,2 \text{ cm.}$

Como Tangente $C = a / b = 29,2 / 18 = 2,177 \rightarrow C = \text{arc tang } B = 65,33^\circ$

Finalmente queda para C: $C = 90 - 65,33 = 24,66^\circ$

Relación Fundamental de la trigonometría:

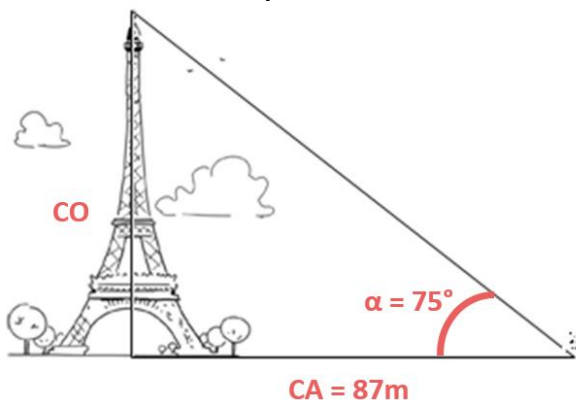
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 ; \quad \text{tg } \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$$

Si sabemos que $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, calcula el seno i la tangente d'aquest angle.

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \quad \text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$$

Aplicaciones de la Trigonometría a la resolución de problemas de la vida diaria.

Cómo hallar la altura a un punto inaccesible:



Resolución:

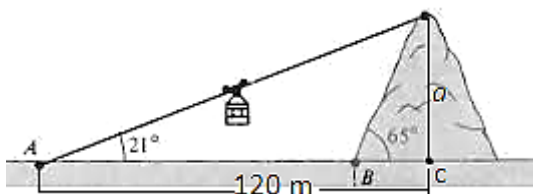
Elegimos en el suelo un punto alejado de la torre y medimos desde el punto hasta la base de la torre: $CA = 87 \text{ m.}$
 Con el **teodolito** (aparato para medir ángulos) determinamos el ángulo α . Como el triángulo CAB es rectángulo, podemos usar la tangente:

$$\text{Tangente } \alpha = \frac{CO}{CA}$$

(Cateto Opuesto / Cateto Adyacente)

$$\tan 75 = \frac{\text{altura}}{87} \rightarrow \text{altura} = \tan 75 \cdot 87 = 324 \text{ m}$$

Exercici:



a) Calcula hasta qué altura sube el funicular.

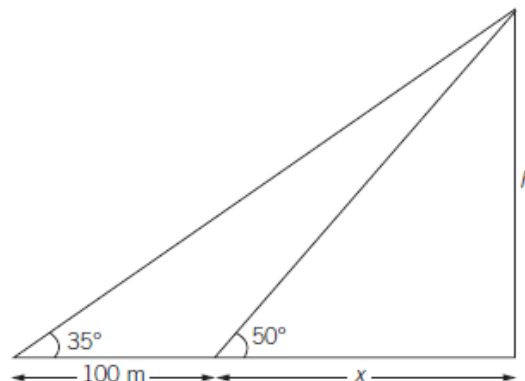
b) Calcula la anchura de la montaña

Des d'un punt veiem l'extrem superior del campanar de l'església sota un angle de 50°. Si ens n'allunyem 100 m, el veiem sota un angle de 35°. Troba l'altura del campanar i la distància a la qual ens trobem inicialment.

Aquest tipus de problemes es resolen per mitjà de les tangents dels dos angles:

$$\operatorname{tg} 50^\circ = \frac{h}{x} \rightarrow h = 1,192x$$

$$\operatorname{tg} 35^\circ = \frac{h}{100 + x} \rightarrow h = 0,7(100 + x)$$



Si les igualem totes dues, resulta:

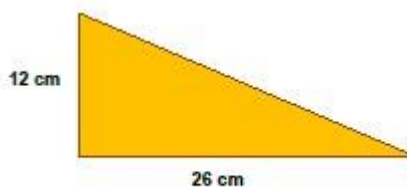
$$1,192x = 0,7(100 + x) = 70 + 0,7x \rightarrow 0,492x = 70 \rightarrow x = 142,3 \text{ m}$$

Substituïm en la primera equació i tenim que l'altura del campanar és de:

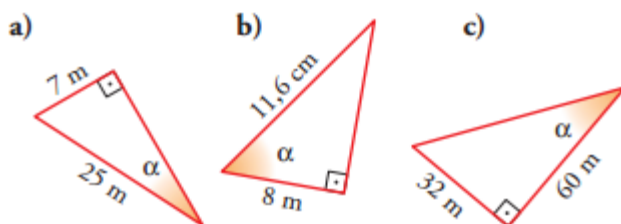
$$h = 1,192x = 1,192 \cdot 142,3 = 169,6 \text{ m}$$

Ejercicios:

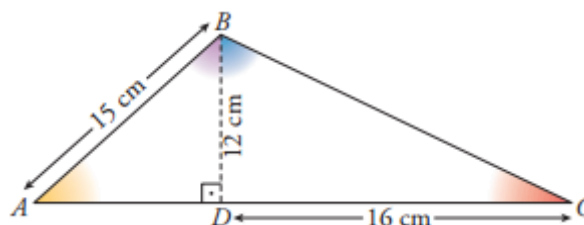
1.- Calcula el costat desconegut i els dos angles:



2.- Halla las razones trigonométricas del ángulo a en cada uno de estos triángulos: Ra: $\operatorname{sen} \alpha = 0,28$ $\operatorname{cos} \alpha = 0,96$ $\operatorname{tan} \alpha = 0,29$



3.- Calcula las razones trigonométricas de los ángulos:



4.- Cuando los rayos del sol forman 40° con el suelo, la sombra de un árbol mide 18 m. ¿Cuál es su altura? (R:15,1)

5.- Una escalera de 3 m está apoyada en una pared. ¿Qué ángulo α forma la escalera con el suelo si su base está a 1,2 m de la pared? R: $\alpha = 66^\circ 25' 19''$

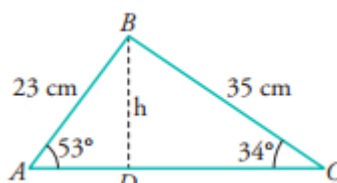


6.- De un triángulo isósceles conocemos su lado desigual, 18 m, y su altura, 10 m. ¿Cuánto miden sus ángulos?

a = 48° 46" y 83° 58"

7.- Halla: a) La longitud AC. b) El área del triángulo ABC

R: 42,84 cm \approx 393,49 cm²



Calcula quant fan els costats a i b , i l'angle β del triangle de la figura.

Com que els tres angles d'un triangle sumen 180° , tenim que:

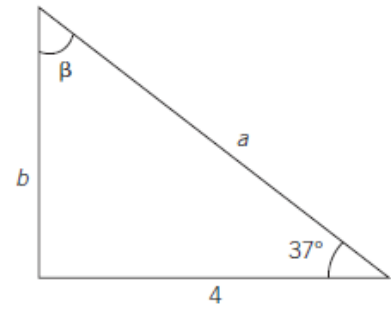
$$180^\circ = 90^\circ + 37^\circ + \beta \rightarrow \beta = 180^\circ - 127^\circ = 53^\circ$$

Per calcular l'altre catet, b , apliquem la definició de $\operatorname{tg} 37^\circ$ i fem servir la calculadora per trobar $\operatorname{tg} 37^\circ$:

$$\operatorname{tg} 37^\circ = \frac{b}{4} \rightarrow b = 4 \cdot 0,75 = 3$$

Per trobar la hipotenusa a poden utilitzar tres mètodes:

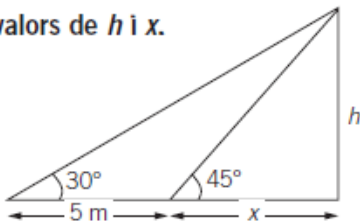
- 1r Aplicar el teorema de Pitàgores.
- 2n Utilitzar la definició de $\sin 37^\circ$.
- 3r Fer servir la definició de $\cos 37^\circ$.



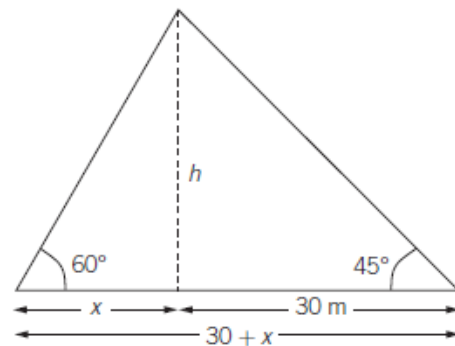
Utilitzarem el segon mètode:

$$\sin 37^\circ = \frac{3}{a} \rightarrow a = \frac{3}{0,6} = 5$$

Troba els valors de h i x .

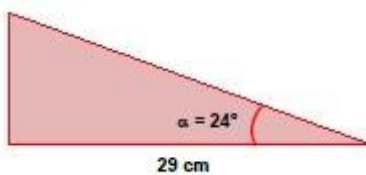


Determina l'altura de l'arbre que, vist des de dues posicions que disten entre si 30 m, forma la figura següent:



1. Als triangles rectangles següents cal determinar l'altre angle agut i dos costats. Calcula'ls. En el cas dels costats, utilitza solament les expressions de les variables trigonomètriques.

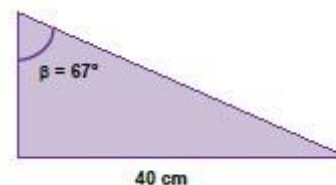
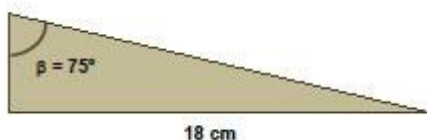
a)



b)



2. Calcula els costats i l'angle desconeguts dels triangles rectangles de les figures



3. Calcula el costat desconegut i els dos angles:



Problemas:

1. En un triangle rectangle, la longitud d'un dels catets és igual a la quarta part de la longitud de la hipotenusa. Calcula el sinus de l'angle oposat a aquest catet i el valor d'aquest angle. Quin és el valor de l'altre angle agut?
2. Si sabem que $\sin \alpha = 0,3$, calcula $\cos \alpha$ a partir de la relació $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
3. Un avió fa la maniobra d'enlairament segons un angle de 9° amb la pista de l'aeroport. Si després d'enlairar-se ha recorregut 3.500 m, a quina altura es troba?
4. Un tram de carretera que fa pendent té una longitud de 2.200 m. Si al final d'aquest tram hem guanyat 100 m d'altura respecte del nivell del mar, quin és l'angle que forma la carretera amb la horitzontal?
5. La paret d'un magatzem projecta una ombra de 55 cm quan l'angle que formen els raigs del Sol amb el terra és de 75° . Quina és l'altura de la paret?
6. Troba l'altura d'un triangle isòsceles, si sabem que el costat desigual mesura 18 cm i els angles iguals 72° cadascun.
7. Troba la longitud de la diagonal d'un rectangle de dimensions 8 cm i 12 cm. Calcula, també, els angles de cadascun dels dos triangles rectangles iguals que es formen quan dibuixem la diagonal.
8. Un globus està subjecte al terra amb una corda de 35 m de llarg, que forma amb el terra un angle de 58° . Si la corda està recta, a quina altura es troba el globus?
9. En un trapezi isòsceles, les bases paral·leles mesuren 20 cm i 34 cm. Troba l'altura del trapezi i el seu perímetre sabent que els angles aguts iguals d'aquest trapezi mesuren 65° .
10. El perfil del sostre d'una habitació té forma de triangle isòsceles. Calcula l'altura i el perímetre d'aquest triangle.
11. El costat d'un decàgon regular mesura 30 cm. Troba les longituds del radi de la circumferència circumscrita al polígon i la seva apotema.
12. Determina l'àrea del triangle inscrit dintre de l'octàgon regular de la figura

