Forma cuadrática de una matriz

Es un polinomio de 2º grado con *n* variables. $a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \ldots + a_{nn}x_n^2$

Matriz asociada a una forma cuadrática:

Los coeficientes de los cuadrados en el polinomio son los elementos de la diagonal de la matriz asociada.

$$(x_1 .. x_n)\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix}$$

El elemento a_{ij} multiplicará a x_i y a x_j, y por la propiedad conmutativa será dos veces por x_ix_j

Ejemplo: Deducir la forma cuadrática asociada a la matriz A

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{cccc} & x & y & z \\ x & 1 & 1 & 2 \\ y & 1 & -1 & 3 \\ z & 2 & 3 & 0 \end{array} = 1x^2 - 1y^2 + 0z^2 + (1+1)xy + (2+2)xz + (3+3)yz = x^2 - y^2 + 2xy + 4xz + 6yz$$

Deducir la matriz asociada a la forma cuadrática a partir del polinomio: bastará dividir por 2 el coeficiente asociado a cada x_ix_j y poner el resultado en la fila i, columna y en la fila j, columna i.

$$3x^2 - y^2 + 2z^2 + 5xy - 6xz \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5/2 & -3 \\ 5/2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Valores propios y Vectores propios de una matriz

Los vectores propios (o autovectores) son los vectores no nulos de una aplicación lineal que, cuando son transformados, dan lugar a un múltiplo escalar llamado valor propio o autovalor. $Av = \lambda v$

*Para hallar los **valores propios***: Se calcula la ecuación característica de la matriz resolviendo el determinante y se hallan las raíces del polinomio obtenido. Estas raíces son los valores propios de la matriz.

Ejemplo de cálculo de los valores: Halla los autovalores de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

En primer lugar, tenemos que hallar la ecuación característica de la matriz. Y, para ello, se debe resolver el siguiente determinante y luego calculamos las raíces del polinomio obtenido igualando a 0:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \qquad \lambda = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \frac{+3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Clasificación de una forma cuadrática

- Q es una forma cuadrática definida positiva si $Q(x) > 0 \quad \forall x \in \Re^n \setminus \{0\}$
- Q es una forma cuadrática definida negativa si $Q(x) < 0 \quad \forall x \in \Re^n \setminus \{0\}$
- Q es una forma cuadrática semidefinida positiva si $Q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Re^n$
- Q es una forma cuadrática semidefinida negativa si $Q(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Re^n$
- Q es una forma cuadrática indefinida si $Q(x_1) < 0 \quad y \quad Q(x_2) > 0$

Ejemplos:

- $3x^2+5x^2+z^2$: definida positiva , puesto que en su expresión sólo aparecen cuadrados con coeficientes positivos.
- $-x^2-2y^2-z^2$: definida negativa , puesto que en su expresión sólo aparecen cuadrados con coeficientes negativos.
- $X^2-2y^2+z^2$: indefinida , los coeficientes son de distinto signo.

Método de clasificación por los valores propios:

1) Q definida positiva (d.p.):	$\lambda_i>0$	2) Q semidefinida positiva (s.d.p.):	$\lambda_i>=0$
3) Q definida negativa (d.n.):	$\lambda_i<0$	4) Q semidefinida negativa (s.d.n.):	$\lambda_i<=0$
5) Q indefinida: $\lambda_i>0$ $\lambda_j>0$			

Ejemplo 2:

$3x^2+3y^2+2z^2-2xy-2yx \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda = 2\,;\ \lambda = 2\,;\lambda = 4$

Todos los valores propios $\lambda_i>0$ → definida positiva.

Función de varias variables

Límites

- Si nos acercamos a x,y →(0,0) cambio a polares: *x = r·cos ϑ ; y = r·sen ϑ*
- Si nos acercamos a x,y →(a,b) cambio a polares: *x = a + r·cos ϑ ; y = b + r·sen ϑ*

Ejemplos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{5r^3\cos^2(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)}{r^2(\cos^2(\theta)+\mathrm{sen}^2(\theta))} = \lim_{r\to 0} 5r\cos^2(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)$$

Teniendo en cuenta que cos (θ)sen(θ) está acotado se desprende que este límite es 0

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)}{r^2(\cos^2(\theta)+\mathrm{sen}^2(\theta))} = \lim_{r\to 0} \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)$$

En este caso, al haber desaparecido la variable r, el valor del límite depende únicamente del valor de θ y, por lo tanto, este límite no existe

Derivadas parciales:

En una función multivariable, como $f(x, y) = x^2y$

Para calcular las derivadas parciales, considerar las otras variables como constantes: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2$

Vector gradiente: es la colección de todas las derivadas parciales en el vector dado: $\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0); \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0); \cdots; \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$

Matriz Hessiana

La matriz Hessiana es una matriz cuadrada compuesta por las segundas derivadas parciales.

Por tanto, la matriz Hessiana siempre será una matriz cuadrada cuya dimensión será igual al número de variables de la función. Además, el teorema de Schwarz dice que no importa el orden de derivación, por lo tanto, la matriz Hessiana es una matriz simétrica. Ver: https://www.matricesydeterminantes.com/matrices/matriz-hessiana-hessiano-2x2-3x3/

Ejemplo de cómo calcular la matriz Hessiana

Ejemplo Hessiana de 2×2: Calcula la matriz Hessiana en el punto (1,0) de la siguiente función:

$$f(x,y) = y^4 + x^3 + 3x^2 + 4y^2 - 4xy - 5y + 8$$

Primero de todo tenemos que calcular las derivadas parciales de primer orden:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 6x - 4y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 8y - 4x - 5$$

Una vez ya sabemos las primeras derivadas, calculamos todas las derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 6 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 + 8 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4$$

Por lo tanto, ahora ya podemos hallar la matriz Hessiana a partir de la fórmula para matrices 2×2

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \qquad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+6 & -4 \\ -4 & 12y^2+8 \end{pmatrix}$$

en el punto (1,0) $H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 6(1)+6 & -4 \\ -4 & 12(0)^2+8 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{H_f(1,0)} = \begin{pmatrix} \mathbf{12} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$

Optimización

Busca los valores de la función máximos o mínimos. Diversas técnicas:

1. Optimización sin restricciones
2. Optimización con restricciones de igualdad (Lagrange)
3. Optimización con restricciones de desigualdad (Simplex)

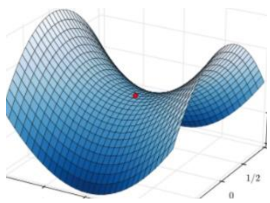
Optimización sin restricciones

f tiene un óptimo local si: $\nabla f(x_0) = 0$ Si todas las derivadas parciales son cero, el gradiente en ese punto es el vector cero. Si el gradiente es cero, sólo puede tratarse de un máximo, un mínimo o un punto de silla.

<u>*Ejemplo*</u>: Encuentra el óptimo de *f(x) =* x^2+y^2+y-1

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \;\rightarrow x = 0 \;;\; \frac{\partial f}{\partial y} = \; 2x - 1 = 0 \;\; \rightarrow y = \; -\frac{1}{2} \;\; \Rightarrow M(0, -\frac{1}{2})$$

<u>*Punto de silla*</u>: Punto donde la pendiente es cero, pero no se trata de un extremo local. La primera derivada es nula, mientras que el signo de la segunda derivada depende de la dirección en que se calcule.



Ejemplo: Dada la función

$$z = x^2 - y^2$$

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0 \longrightarrow x = 0 & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \text{ mínimo relativo.} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y = 0 \longrightarrow y = 0 & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2 \text{ máximo relativo} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \boldsymbol{x = 0} \\ \boldsymbol{y = 0}, \end{array} \text{es un punto de silla}$$

-

Clasificación de los puntos críticos:	O según su matriz Hessiana:
• Si D > 0 y $f_{xx}(a,b) > 0$, ➔ (a,b) es un mínimo local. • Si D > 0 y $f_{xx}(a,b) < 0$, ➔ (a,b) es un máximo local. • Si D < 0, ➔ (a,b) es un punto de silla. • Si D=0 ➔ el criterio no es concluyente.	• Hf Definida positiva: mínimo • Hf Definida negativa: máximo • Hf indefinida: punto de silla • Hf semidefinida: No concluyente

<u>*Ejercicio 1*</u>: Clasificar los puntos críticos de *f(x,y) =* $2x^2 + 2y^2 - x^4 - y^4 + 3$.

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 4x - 4x^3 = 0 \\ f_y = 4y - 4y^3 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 4x(1-x^2) = 0 \\ 4y(1-y^2) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 0 \;\; \text{ó} \;\; (1-x^2) = 0 \\ y = 0 \;\; \text{ó} \;\; (1-y^2) = 0 \end{array}\left.\right\} \begin{array}{l} x = 0, \; x = 1, \; x = -1 \\ y = 0, \; y = 1, \; y = -1 \end{array}\left.\right\}$$

Combinado estos valores: (0,0), (0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0), (1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)

Calculamos la matriz hessiana, mediante las derivadas parciales de segundo orden:

$$H = \begin{pmatrix} 4 - 12x^2 & 0 \\ 0 & 4 - 12y^2 \end{pmatrix}$$

Su determinante hessiano: D= $(4 - 12x^2)\cdot(4 - 12y^2)$ =0

Punto D(x,y)	Tipo de punto crítico
- Punto (0,0) D(0,0) = 16 > 0 y fxx(0,0) = 4 > 0 (0,0)	mínimo local
- Punto (0,1) D(0,1) = -32 < 0 (0,1)	punto de silla
- Punto (0,-1) D(0,-1) = -32 < 0 (0,-1)	punto de silla
- Punto (1,0) D(1,0) = -32 < 0 (1,0)	punto de silla
- Punto (-1,0) D(-1,0) = -32 < 0 (-1,0)	punto de silla
- Punto (1,1) D(1,1) = 64 > 0 y fxx(1,1) = -8 < 0 (1,1)	máximo local
- Punto (1,-1) D(1,-1) = 64 > 0 y fxx(1,-1) = -8 < 0 (-1,1)	máximo local
- Punto (-1,1) D(-1,1) = 64 > 0 y fxx(-1,1)= -8 < 0 (-1,1)	máximo local
- Punto (-1,-1) D(-1,-1) = 64 > 0 y fxx(-1,-1) = -8 < 0 (-1,-1)	máximo local

Ejercicio 2: Determina y clasifica los puntos críticos de la función *f(x,y)=x³ +3xy² -3y² -3x² +11*

$$\left.\begin{array}{l} f_x=3x^2+3y^2-6x=0 \\ f_y=6xy-6y=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3x^2+3y^2-6x=0 \\ 6y(x-1)=0 \end{array}\right\} y=0 \text{ ó } (x-1)=0 \Longrightarrow y=0 \text{ ó } x=1$$

- Si y=0, sustituimos en la primera ecuación de modo que:

$$\left. 3x^2+3\cdot 0^2-6x=0,\ 3x^2-6x=0 \Longrightarrow 3_x(x-2)=0 \Longrightarrow x=0 \text{ ó } x=2 \right\} (0,0),(2,0)$$

- Si x=1, sustituimos en la primera ecuación de modo que:

$$\left. 3\cdot 1^2+3y^2-6\cdot 1=0,\ 3y^2=3 \Longrightarrow y^2=1 \Longrightarrow y=1 \text{ ó } y=-1 \right\} (1,1),(1,-1)$$

obtenido cuatro puntos críticos (0,0), (2,0), (1,1), (1,-1). la matriz hessiana $H = \begin{pmatrix} 6x-6 & 6y \\ 6y & 6x-6 \end{pmatrix}$

a) (0,0). D(0,0) = 36 > 0 y fxx(0,0) = -6 < 0 → (0,0) es un máximo local.

b) (2,0). D(2,0) = 36 > 0 y fxx(0,0) = 6 > 0 → (2,0) es un mínimo local.

c) (1,1). D(1,1) = -36 < 0 → (1,1) es un punto de silla.

d) (1,-1). D(1,-1) = -36 < 0 → (1,-1) es un punto de silla.

Teorema local-global

- Si *f* es convexa y x_0 mínimo local ➔ x_0 mínimo global
- Si *f* es cóncava y x_0 máximo local ➔ x_0 máximo global

Optimización con restricciones de igualdad (Método Lagrange)

Hay una función objetivo y unas restricciones. El método se basa en incorporar las ecuaciones restrictivas a la función objetivo: siendo $L(\vec{x};\lambda) = f(\vec{x}) + \lambda(b - g(\vec{x}))$ la denominada función de Lagrange que usa una variable más, λ , que recibe el nombre de multiplicador de Lagrange.

Ejemplo 1:

$$\left.\begin{array}{l} \min\ x^2+y^2 \\ x+y=3 \end{array}\right\} L(x,y;\lambda)=x^2+y^2+\lambda(3-x-y) \quad \begin{array}{l} \nabla_{\vec{x}}L(x,y;\lambda)=(2x-\lambda,\ 2y-\lambda)=(0,0) \\ \dfrac{\partial L}{\partial\lambda}(x,y,\lambda)=3-x-y=0 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-\lambda=0 \\ 2y-\lambda=0 \\ x+y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{3}{2},\quad y=\frac{3}{2},\quad \lambda=3$$

Condición suficiente: $H_{\vec{x}}L(x,y;\lambda)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ definida positiva $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ es un mínimo condicionado o restringido

Ejemplo 2:

$$\left.\begin{array}{l} opt\ xy \\ x+y=1 \end{array}\right\} L(x,y;\lambda)=xy+\lambda(1-x-y) \quad \left.\begin{array}{l} \nabla_{\vec{x}}L(x,y;\lambda)=(y-\lambda,\ x-\lambda)=(0,0) \\ \dfrac{\partial L}{\partial\lambda}(x,y,\lambda)=1-x-y=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y-\lambda=0 \\ x-\lambda=0 \\ x+y=1 \end{array} \quad x=½,\ y=½\ \lambda=½$$

Condición suficiente: $H_{\vec{x}}L(x,y;\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ indefinida $\quad \nabla g(x,y)=(1,1) \quad (1,1)\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}=\Delta x+\Delta y=0 \quad \Delta y=-\Delta x$

Entonces, $(\Delta x,-\Delta x)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x \\ -\Delta x \end{pmatrix}=2(\Delta x)(-\Delta x)=-2(\Delta x)^2<0$ $\quad \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ máximo condicionado o restringido