Integrales dobles

Es la integral de una integral y sirve para encontrar tanto un área como un volumen, dependiendo de cómo se configure la función y la región de integración. Si la función es constante, te dará un área. Si la función es tridimensional, te dará un volumen.

Teorema de Fubini: →

- *Si el recinto es cuadrado:*

$$\int_{y_1}^{y_2}\left(\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)dx\right)dy = \int_{x_1}^{x_2}\left(\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)dy\right)dx$$

Ejemplo 1: Dado el rectángulo (0,1) a (4,5) calcular la integral: $\iint_R xy\, dxdy$

$$\int_0^1\left(\int_4^5 xydy\right)dx = \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=4}^{y=5}dx = \int_0^1 \frac{9}{2}xdx = \frac{9}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{9}{4}$$

Ejemplo 2: Dado el rectángulo (0,1) a (-1,0) calcular la integral: $\iint_R (x + e^{x+y})\, dxdy$

$$\int_{-1}^0\left(\int_0^1 (x+e^{x+y})dx\right)dy = \int_{-1}^0\left[\frac{x^2}{2}+e^{x+y}\right]_{x=0}^{x=1}dy = \int_{-1}^0 (\frac{1}{2}+e^{1+y}-e^y)dy = \left[\frac{y}{2}+e^{1+y}-e^y\right]_{-1}^{0} = e+\frac{1}{e}-\frac{3}{2}$$

Ejemplo 3: Calcular la integral doble de la función *f(x,y) = x·sen y* a lo largo del recinto: P = {−1 ≤ x≤ 2 ; 0 ≤ y ≤π}

$$\int_{-1}^2\left(\int_0^\pi xsenydy\right)dx = \int_{-1}^2 [-x\cos y]_{y=0}^{y=\pi}dx = \int_{-1}^2 [-x\cos\pi-(-x\cos 0)]dx = \int_{-1}^2 2xdx = \left[x^2\right]_{-1}^{2} = 4-1 = 3$$

- *Si el recinto sobre el que se hace la integral no es cuadrado, pero es básico (dos curvas):*

$$\int_a^b\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy\right)dx \quad\Big|\quad \int_c^d\left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)dx\right)dy$$

Ejemplo 4: Calcular la integral doble de la función *f(x; y) = (2x − 4)y*
a lo largo del recinto P = {0 ≤ x ≤ 1 ; x ≤ y ≤ x^2-3 }

$$\int\int_R (2x-4)ydxdy = \int_0^1\left(\int_x^{x^2+3}(2x-4)ydy\right)dx = \int_0^1\left[(2x-4)\frac{y^2}{2}\right]_{y=x}^{y=x^2+3}dx = \int_0^1 (x-2)\left[y^2\right]_{y=x}^{y=x^2+3}dx =$$

$$= \int_0^1 (x-2)\left[(x^2+3)^2-x^2\right]dx = \int_0^1 (x-2)\left[x^4+6x^2+9-x^2\right]dx = \int_0^1 (x-2)\left[x^4+5x^2+9\right]dx =$$

$$= \int_0^1 (x^5-2x^4+5x^3-10x^2+9x-18)dx = \left[\frac{x^6}{6}-2\frac{x^5}{5}+5\frac{x^4}{4}-10\frac{x^3}{3}+9\frac{x^2}{2}-18x\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{6}-\frac{2}{5}+\frac{5}{4}-\frac{10}{3}+\frac{9}{2}-18 = \frac{10-24+75-200+270-1080}{60} = -\frac{941}{60}$$

<u>Ejemplo 5</u>: Dado el recinto R = {(x,y) ∈ R2 : $x^2 + y^2 \le 1$; y ≥ 0} calcular la integral: $\iint_R \ y\,dxdy$

Sol: Resolviendo el sistema de inecuaciones: $\begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ y \ge 0 \end{cases} \rightarrow x^2 \le 1 \rightarrow -1 , 1$

ponemos el recinto de la forma: { −1 ≤ x ≤ 1 ; 0 ≤ y ≤ √ 1 − x^2}

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} ydy\right)dx = \int_{-1}^{1}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1-x^2)dx = \frac{1}{2}\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

<u>Ejemplo 6</u>: Hallar la integral $\iint_R \ x^2 - 2y\,dxdy$ donde R es el recinto encerrado por las curvas: $y=x^2$; $y=x^3$

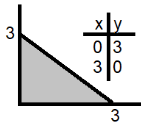
Los puntos de intersección de las dos curvas resultan de resolver el sistema formado por ambas ecuaciones: $x^2=x^3 \rightarrow x^2-x^3=0 \rightarrow x^2(x-1)=0 \rightarrow x_1=0$; $x_2=1 \rightarrow$ (0, 0) y (1, 1).

Entonces el recinto puede ponerse así (mejor hacer un boceto): R = {(x,y) ∈ R2 : 0 ≤ x ≤ 1; $x^3 \le y \le x^2$}

$$\int_0^1\left(\int_{x^3}^{x^2}(x^2-2y)dy\right)dx = \int_0^1 \left[(x^2y-y^2)\right]_{y=x^3}^{y=x^2} dx = \int_0^1\left[(x^4-x^4)-(x^5-x^6)\right]dx = \int_0^1(x^6-x^5)dx = \left[\frac{x^7}{7}-\frac{x^6}{6}\right]_0^1 = (\frac{1}{7}-\frac{1}{6})-0 = -\frac{1}{42}$$

<u>Exam URV</u>: A= { x+y≤3; y ≥ 0; y ≥ 0x} a) Dibuja A b) Calcula $\iint_R \ x^2(y-3)\,dxdy$

a) Región de restricciones: y = 3 - x Damos valores:



b) *0 ≤ y ≤3 ; 0 ≤ x ≤ y - 3*

$$\int_0^3\int_0^{y-3} x^2(y-3)\,dxdy = \int_0^3 \frac{(y-3)^4}{3}\,dy = \frac{81}{5}$$

Cambios de variable en la integral doble:

Suele ser útil paras a coordenadas polares: x = r cosα y = r sin α

<u>*Ejemplo 7*</u>: $\iint_R \ e^{-x^2-y^2}\,dxdy$ en el recinto: R = {$x^2 + y^2 \le 1$; y ≥ 0}

El recinto puede ponerse en la forma : {−1 ≤ x ≤ 1 ; 0 ≤ y ≤ √ 1 − x^2}

$$\int\int_{R'} e^{-\rho^2}\rho d\rho d\theta = \int_0^{\pi}\left(\int_0^1 e^{-\rho^2}\rho d\rho\right)d\theta = \int_0^{\pi}\left[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\frac{1}{e}-1)d\theta = -\frac{1}{2}(\frac{1}{e}-1)\,[\theta]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}(1-\frac{1}{e})$$

Ejercicios:

$$\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^{1+x} 2xy \ dy\cdot dx$$

Pista: $\int_0^1 x(1+x^2-x)\,dx = \frac{13}{12}$

$$\int_0^1\int_{x^2}^{1} x^3\cdot Sen(y^3)\,dy\cdot dx$$

Pista: la región tipo 1 0≤x≤1 ; x^2≤1 convertir en tipo 2: $0 \le y \le 1$; $0 \le x \le \sqrt{y}$

$\int_{y=0}^{y=1}\int\int_{x00}^{x=\sqrt{y}} x^3\cdot \sin(y^3)\,dx\,d_y = 1/4\int_{y=0}^{y=1} y^2\sin(y^3)\,dy$